Control 2: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Mauro Escobar - Felipe Subiabre
10 de noviembre de 2010

P1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se define la transformada de Fourier de f, como la función $\hat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) \; dx.$$

(a) **(1 pto.)** Pruebe que la aplicación $f \longmapsto \hat{f}$ es lineal continua de $(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ en $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$.
Considere los operadores de traslación $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ y escalamiento $(\delta_\lambda f)(x) = f(x/\lambda)$. Pruebe que

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_h f}(\xi) &= e^{-2\pi i \langle \xi, h \rangle} \hat{f}(\xi), \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n, \\ \widehat{\delta_\lambda f}(\xi) &= \lambda^n \hat{f}(\lambda \xi), \quad \forall\, \lambda > 0. \end{aligned}$$

(b) **(1 pto.)** Pruebe el **Teorema de Riemann-Lebesgue**:
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\hat{f} \in \mathcal{C}_{\infty,0}(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{ h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \lim_{|\xi| \to \infty} h(\xi) = 0 \right\}.$$

Indicación: Considere el cambio de variable $x = y - \frac{\xi}{2|\xi|^2}$.

(c) En esta parte se probará el siguiente resultado que permite extender la Transformada de Fourier a L^2.
Teorema de Plancherel:
Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f}$ está en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y se tiene la igualdad:

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

(i) **(1 pto.)** Para ello basta probar que si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. ¿Por qué?

(ii) **(1 pto.)** Suponiendo que $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ demuestre, justificando además la existencia de las integrales, que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \exp[-\delta\pi|\xi|^2] \; d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-\pi\delta \left| \xi + \frac{i}{\delta}(x-y) \right|^2 - \frac{\pi|x-y|^2}{\delta} \right] f(y) f(x) \; d\xi \, dy \, dx$$

$$= \delta^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-\frac{\pi|x-y|^2}{\delta} \right] f(y) f(x) \; dy \, dx.$$

Indicación: Le puede ser útil $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z-\mu|^2}{2\sigma^2}} \; dz = (2\pi\sigma^2)^{n/2}, \; \forall \mu \in \mathbb{C}^n$.

(iii) **(1 pto.)** Demuestre que $\forall a > 0, \; \forall K \subset \mathbb{R}^n$ compacto

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\delta^{-n/2} \iint_{K \times K \cap \{|x-y| > a\}} \exp\left[-\frac{\pi|x-y|^2}{\delta} \right] \; dy \, dx \right] = 0.$$

(iv) **(1 pto.)** Concluya el resultado.

P2. (a) **(1.5 ptos.)** Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida finita. Pruebe que un funcional lineal continuo T sobre $L^\infty(\mu)$ posee una representación integral $T(f) = \int_X g(x)f(x)d\mu(x),\ g \in L^1(\mu)$, si y sólo si la función

$$A \longmapsto T(1_A)$$

es σ-aditiva.

(b) **(1.5 ptos.)** Sea μ una medida σ-finita, $1 < p < \infty,\ q$ el exponente Hölder-conjugado de p. Sea f una función medible tal que $fg \in L^1(\mu),\ \forall g \in L^q(\mu)$. Entonces $f \in L^p(\mu)$.

(c) Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y μ una medida regular boreliana sobre $\mathbb{R}^n$. Suponga que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\forall E \in \mathcal{B},\ \lambda(E) = c \implies \mu(E) = c.$$

Se probará que $\mu = \lambda$. Para ello:

(i) **(1 pto.)** Pruebe la siguiente propiedad de la medida de Lebesgue:

$$\forall A \in \mathcal{B},\ \lambda(A) \geq c \implies \exists C \in \mathcal{B},\ C \subseteq A,\ \lambda(C) = c.$$

(ii) **(1 pto.)** Muestre que μ es σ-finita. Usando la descomposición de Lebesgue $\mu = \mu_1 + \mu_2,\ \mu_1 \ll \lambda,\ \mu_2 \perp \lambda$ y la propiedad de (i), muestre que $\mu_2 = 0$ (y por lo tanto $\mu \ll \lambda$).

(iii) **(1 pto.)** Sea $f = \dfrac{d\mu}{d\lambda}$ la derivada de Radon-Nykodym de μ respecto a λ. Pruebe que $f = 1$ λ-c.t.p. y concluya el resultado.
Indicación: Pruebe que los conjuntos $L = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 1\},\ G = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 1\}$ tienen medida nula considerando los casos $\lambda(L) \geq c \vee \lambda(G) \geq c$ y $\lambda(L), \lambda(G) < c$.

Tiempo: 4 horas.