Auxiliar 12: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Mauro Escobar - Felipe Subiabre
9 de noviembre de 2010

P1. Generalización de Radon-Nykodym

Sean ν una medida con signo arbitraria y μ una medida σ-finita sobre $(X, \mathcal{T})$ tales que $\nu \ll \mu$. Se probará que existe una función medible a valores extendidos $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $d\nu = f d\mu$. Para ello:

a) Muestre que basta considerar el caso en que μ es finita y ν es positiva. Pruebe que en este caso existe un conjunto $E \in \mathcal{T}$ σ-finito para ν tal que $\mu(E) \geq \mu(F)$ para todo conjunto F σ-finito para ν.

b) Demuestre que el teorema de Radon-Nikodym es válido para E, y si $F \cap E = \varnothing$ entonces $\nu(F) = \mu(F) = 0$ o $\mu(F) > 0$ y $|\nu(F)| = \infty$. Concluya el resultado.

Una medida μ sobre $(X, \mathcal{T})$ se llama *descomponible* si existe una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$ con las siguientes propiedades:

(i) $\mu(F) < \infty \ \forall F \in \mathcal{F}$.

(ii) Los miembros de $\mathcal{F}$ son disjuntos y su unión es X.

(iii) Si $\mu(E) < \infty$ entonces $\mu(E) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(E \cap F)$

(iv) Si $E \subseteq X$ y $E \cap F \in \mathcal{T} \ \forall F \in \mathcal{F}$ entonces $E \in \mathcal{T}$.

c) Pruebe que toda medida σ-finita es descomponible.

d) Usando lo probado en las partes a) y b), demuestre que si μ es descomponible y ν es una medida con signo en $(X, \mathcal{T})$ tal que $\nu \ll \mu$, entonces existe una función medible a valores extendidos $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para cualquier E σ-finito para μ, y $|f| < \infty$ sobre cualquier $F \in \mathcal{F}$ que es σ-finito para ν.

P2. Problemas varios

a) Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida tal que existen conjuntos medibles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ tales que $0 < \mu(E_i) < \infty,\ i = 1, \ldots, n,\ X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, y cada E_i no contiene ningún subconjunto propio no vacío y medible. Muestre que $(L^\infty(\mu))^* = L^1(\mu)$, es decir, la función

$$\begin{aligned} T : L^1(\mu) &\to (L^\infty(\mu))^* \\ g &\mapsto T(g)(f) = \int_X f(x)g(x)dx \end{aligned}$$

es sobreyectiva.

b) Sea (X, Θ) un espacio topológico. Para una medida boreliana μ sobre X se define su soporte como el conjunto cerrado

$$\mathrm{Sop}(\mu) = \left(\bigcup_{\theta \in \Theta,\ \mu(\theta)=0} \theta \right)^c$$

Dado X un espacio métrico y K un subconjunto compacto de X, pruebe que existe una medida regular Boreliana μ sobre X tal que $\mathrm{Sop}(\mu) = K$.

c) Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, g una función medible y $1 \leq p < \infty$. Suponga que existe un número real $M > 0$ tal que para toda ϕ función simple se cumple $\phi g \in L^1$ y $\int_X \phi g d\mu \leq M \|\phi\|_p$. Pruebe que:

(i) $g \in L^q(\mu)$, donde q es el exponente Hölder-conjugado de p.

(ii) $\forall f \in L^p(\mu)$ $\int_X fg d\mu \leq M \|f\|_p$