Auxiliar 8: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Mauro Escobar - Felipe Subiabre
13 de octubre de 2010

P1. a) Decimos que $x \in \mathbb{R}$ es un punto de densidad de $A \in \mathcal{L}$ si el siguiente límite existe y vale 1:

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mu(A \cap (x-r, x+r))}{2r} = 1$$

Pruebe que para todo $A \in \mathcal{L}$ y para casi todo $x \in A$, x es un punto de densidad de A. Decimos que una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ satisface la propiedad $\mathcal{N}$ si

$$\forall N \in \mathcal{L},\ \mu(N) = 0 \implies [f(N) \in \mathcal{L},\ \mu(f(N)) = 0]$$

b) Pruebe que si f es absolutamente contínua entonces satisface la propiedad $\mathcal{N}$.

c) Suponga que f es contínua y creciente. Pruebe que si f satisface la propiedad $\mathcal{N}$ entonces es absolutamente contínua.

P2. Sea $(X, \mathcal{F}, \nu)$ un espacio de medida σ-finito y que $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$ es el espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Considere $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{F}$-medible y no negativa. Se definen

$$\mathcal{E}(f) := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\},\ \mathcal{E}_<(f) := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t < f(x)\}$$

a) Pruebe que $\mathcal{E}(f)$ y $\mathcal{E}_<(f)$ son $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}$-medibles. Concluya que

$$G(f) := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : t = f(x)\}$$

también es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}$-medible.

b) Pruebe que

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \nu \otimes \mu(\mathcal{E}_<(f)) = \nu \otimes \mu(\mathcal{E}(f))$$

Concluya que $\nu \otimes \mu(G(f)) = 0$.

P3. Sean $(\Omega_1, \mathcal{B}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ espacios medibles y $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$ medidas finitas sobre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente.

a) Suponga que $\nu_1 \ll \mu_1$ y $\nu_2 \ll \mu_2$. Probar que $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$ y que

$$\frac{d\nu_1 \otimes \nu_2}{d\mu_1 \otimes \mu_2} = \frac{d\nu_1}{d\mu_1} \frac{d\nu_2}{d\mu_2},\ \mu_1 \otimes \mu_2\text{-c.t.p.}$$

b) Pruebe que si $\nu_1 \amalg \mu_1$ o $\nu_2 \amalg \mu_2$ entonces $\nu_1 \otimes \nu_2 \amalg \mu_1 \otimes \mu_2$.