# Auxiliar 5: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Mauro Escobar - Felipe Subiabre
24 de septiembre de 2010

**P1. [Teorema de Egorov]**
Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida finita y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-medibles. Entonces

$$f_n \longrightarrow f \ ctp \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathcal{T} \text{ con } \mu(A) \leq \varepsilon,\ \text{tal que } \sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

**P2. [Teorema de Luzin]**
Sea $(X, \Theta)$ un esp. top. Haussdorf-separado y $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida regular ($\mathcal{B}(X, \Theta) \subseteq \mathcal{T}$) y $\sigma$-finita. Supongamos que $\mathcal{T}$ es completa. Entonces, una función $f : X \to \mathbb{R}$ es medible *ssi* para todo $K$ compacto y $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K_1 \subseteq K$, tal que $\mu(K \backslash K_1) \leq \varepsilon$ y $f|_{K_1} : K_1 \to \mathbb{R}$ es continua.

Def: Sean $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ espacio de medida finita. Se dirá que $\mathcal{C} \subseteq L^1$ es uniformemente integrable si

$$\sup_{f\in\mathcal{C}} \|f\|_1 < +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{\mu(A)\to 0} \left[ \sup_{f\in\mathcal{C}} \int_A |f| d\mu \right] = 0.$$

**P3. [Integrabilidad uniforme y convergencia ctp]**
Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $L^1 = L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

(a) Pruebe que si $f \in L^1$, entonces $\lim\limits_{\mu(A)\to 0} \int_A |f| d\mu = 0$.

(b) Sean $(f_n)_n \subseteq L^1$ y $f \in L^1$ tales que $f_n \to f$ ctp. Probar que si $f_n \to f$ en $L^1$, entonces:

  (i) $\lim\limits_{\mu(A)\to 0} \int_A |f_n| d\mu = 0$ uniformemente en $n$.

  (ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon \in \mathcal{B}$, $\mu(A_\varepsilon) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{A_\varepsilon^c} |f_n| d\mu < \varepsilon$.
  **Hint**: Pruebe que dado $g \in L^1$ y $\varepsilon > 0$, existe $A_\varepsilon \in \mathcal{B}$ con $\mu(A_\varepsilon) < \infty$, tal que $\int_{A_\varepsilon^c} |g| \, d\mu < \varepsilon$.

En adelante suponga $\mu$ finita.

(c) Pruebe que si $(f_n)_n \subseteq L^1$ converge puntualmente a $f$, entonces

$$\left\{ \int_\Omega f_n \, d\mu \to \int_\Omega f \, d\mu,\ f \in L^1 \right\} \Longrightarrow (f_n)_n \text{ es uniformemente integrable.}$$

(d) Suponga $f_n \in L^1$ con $f_n \to f$ puntualmente. Suponga que $\lim\limits_{\mu(A)\to 0} \int_A |f_n| d\mu = 0$ uniformemente en $n$. Probaremos que $f \in L^1$. Para esto

  (i) Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n, m \geq n_0$, $\mu(|f_n - f_m| > \varepsilon) \leq \bar{\varepsilon}$.

  (ii) Pruebe que $f_n$ es de Cauchy en $L^1$.

  (iii) Concluya.

(e) Suponga ahora que $(f_n)_n \subseteq L^p$ con $p \in [1,\infty)$ converge puntualmente a $f \in L^p$. Se pide probar que

$$\|f_n\|_p \to \|f\|_p \Longleftrightarrow f_n \to f \text{ en } L^p.$$

Para la implicancia no trivial se pide:

(i) Pruebe que $\int_\Omega \left|\, |f_n|^p - |f|^p \,\right| d\mu \to 0$ y que $\lim\limits_{\mu(A)\to 0} \int_A |f_n|^p = 0$ uniformemente en $n$.

(ii) Pruebe que

$$\lim_{n,m\to\infty} \left( \int_\Omega |f_n - f_m|^p \, d\mu \right)^{1/p} = 0.$$

(iii) Concluya.