Auxiliar 4: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Mauro Escobar - Felipe Subiabre
8 de septiembre de 2010

P1. (i) Sean X un conjunto, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un álgebra, $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{A})$ y $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ una medida finita. Pruebe que para todo $A \in \mathcal{T}$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A \Delta A_\epsilon) \leq \epsilon$.

(ii) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad (i.e. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$). Sea $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia creciente de sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$, tales que $\sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right) = \mathcal{F}$. Pruebe que dada $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\epsilon > 0$ existen $n \in \mathbb{N},\ g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ tal que $\|f - g\|_{L_1} \leq \epsilon$.

P2. Sea (X, τ, μ) un espacio de medida finita ($\mu(X) = 1$) y $H : X \to \mathbb{R}$ una función medible. Se define la función de distribución de H, denotada por $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, como:

$$F(\alpha) := \mu\left(\{x \in X : H(x) \leq \alpha\}\right)$$

Demuestre que:

a) F es creciente y contínua a la derecha.

b) Para toda función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boreliana se tiene que:

$$\int_X \phi(H(x))d\mu(x) = \int_\mathbb{R} \phi(\alpha)d\mu_F(\alpha)$$

Este resultado justifica el cálculo en la forma usual de la esperanza de una variable aleatoria.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to R$ una función que verifica:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x, \cdot) \text{ es de clase } \mathcal{C}^1,\ \forall t \in \mathbb{R}\ f(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}, dx)$$

y que además existe $g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ tal que $\forall x, t \in \mathbb{R}\ \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x)$.

Pruebe entonces que la función $F(t) := \int_\mathbb{R} f(x, t)dx$ es de clase $\mathcal{C}^1$, con derivada dada por $F'(t) = \int_\mathbb{R} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dx$

P4. (i) Sea (X, τ, μ) espacio de medida y $f \in L^1$. Pruebe que $\nu : \tau \to \mathbb{R}$ dada por $\nu(A) = \int_A f d\mu$ define una medida con signo finita. Encuentre ν_+, ν_- y $|\nu|$.

(ii) Sea (X, τ) espacio medible y ν medida con signo finita sobre τ. Se define $L^1(X, \tau, \nu) := L^1(X, \tau, |\nu|)$, y para $f \in L^1(X, \tau, \nu)$,

$$\int_X f d\nu := \int_X f d\nu_+ - \int_X f d\nu_-$$

Verifique que está bien definida, pruebe que $L^1(X, \tau, \nu) = L^1(X, \tau, \nu_+) \cap L^1(X, \tau, \nu_-)$, y que si $\|\nu\|_{VT} = |\nu|(X)$ denota la norma en variación total de ν, entonces

$$\|\nu\|_{VT} = \sup\left\{\int_X f d\nu : f \text{ medible acotada tal que } \|f\|_\infty \leq 1\right\}$$

donde $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$, y por lo tanto $\nu \in \mathcal{F}_b(X)'$ (dual topológico), donde $F_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es medible acotada}\}$.