Auxiliar 3: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Mauro Escobar - Felipe Subiabre
31 de agosto de 2010

P1. Sea (X,d) un espacio métrico, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ la tribu boreliana y $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ una medida finita.

(a) Probar que todo boreliano B satisface la siguiente propiedad:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ F \subseteq X \text{ cerrado})(\exists\ U \subseteq X \text{ abierto}) \quad F \subseteq B \subseteq U \ \text{ y } \ \mu(U \backslash F) \leq \varepsilon. \qquad (*)$$

Para ésto se sugiere probar

(i) La propiedad es válida si B es cerrado.

(ii) Defina $\mathcal{F} \doteq \{B \in \mathcal{B} : (*) \text{ es cierta para } B\}$, y demuestre que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra.

(iii) Concluya.

(b) Demuestre que si (X,d) es σ-compacto, entonces μ es regular.

P2. Sea (X,d) un espacio métrico, separable y completo, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ la tribu boreliana y $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ una medida finita. El objetivo es probar que μ es regular.

(a) Pruebe que $\mu(X)$ puede ser aproximada interiormente por compactos. Para ésto, considere $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ denso en X, y luego

(i) Pruebe que para todo k, existe p_k tal que $A_k \doteq \bigcup_{j=0}^{p_k} B(x_j, \frac{1}{k})$ satisface

$$\mu(A_k) \geq \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

(ii) Pruebe que $K \doteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$ es un compacto para el cual

$$\mu(X \backslash K) \leq \varepsilon.$$

(b) Considere la familia $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Concluya que μ es regular.

P3. (a) Sean $\mu,\ \nu$ medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Se define $\|\mu - \nu\| \doteq |\mu - \nu|(\Omega)$.
Pruebe que

$$\|\mu - \nu\| = 2 \cdot \sup_{A\in\mathcal{F}} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

(b) Sea

$$\mathcal{M}(\Omega) \doteq \{\ \mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \mid \mu \text{ es medida con signo finita }\}.$$

Probar que $(\mathcal{M}(\Omega), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

P4. Sean $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ una medida σ-finita e invariante bajo traslación y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mu(A) > 0$.
Pruebe que $A - A$ es vecindad del origen.
Hint: Partir del caso $A = K$ compacto.