

MA48C Medida e Integración. Semestre 2009-01

Profesor: Jaime San Martín Auxiliares: Julio Backhoff, Cristóbal Guzmán y Omar Larré

Ejercicios Semana 4

2 de Abril de 2009

- P1.-** a) Sea $\varepsilon > 0$. Pruebe que existe un abierto $V_\varepsilon \subseteq [0, 1]$ denso en $[0, 1]$ y tal que $\lambda(V_\varepsilon) < \varepsilon$ (λ es la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}).
- b) Sea μ una medida de probabilidad sobre (X, \mathcal{A}) , con \mathcal{A} álgebra. Pruebe que si para los conjuntos A_i $i = 1, \dots, n$ se tiene $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) > n - 1$, entonces $\mu\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) > 0$.

Medida Exterior y Teorema de Caratheodory

- P2.-** El objetivo de este problema es probar que para definir la medida exterior de Caratheodory es necesario considerar recubrimientos numerables. Como ejemplo consideramos $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, donde λ es la medida de Lebesgue sobre los borelianos. Se define el *contenido exterior de Jordan* para $E \subseteq \mathbb{R}$ como

$$J_*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda(I_j) : \mathcal{J} \text{ finito, } I_j \text{ intervalo semiabierto} \right\}.$$

- a) Pruebe que $J_*(E) = J_*(\bar{E})$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}$.
- b) Encuentre un conjunto E para el cual $J_*(E) = 1$ mientras que $\lambda^*(E) = 0$.
- P3.-** Sea μ^* una medida exterior sobre X , \mathcal{M}^* la clase de conjuntos μ^* -medibles, $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ y μ_c la medida exterior de Caratheodory definida a partir de μ . Pruebe que:
1. Si $E \subseteq X$, entonces $\mu^*(E) \leq \mu_c(E)$, con igualdad si y sólo si existe $A \in \mathcal{M}^*$ tal que $E \subseteq A$ y $\mu^*(E) = \mu^*(A)$.
 2. Si existe una medida μ' definida en una semi-álgebra, tal que $\mu^* = \mu'_c$ (la medida exterior de Caratheodory asociada a μ'), entonces $\mu^* = \mu_c$.

- P4.-** Sea $\Omega \neq \emptyset$.

Definición 0.1. Se dice que $\mathcal{C} \subseteq \Omega$ es una clase que recubre si $\emptyset \in \mathcal{C}$ y dado $A \subseteq \Omega$ existe $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que recubre A .

Sea $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ tal que $\tau(\emptyset) = 0$. Suponga que \mathcal{C} es una clase que recubre, entonces se define $\mu^* : \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ por

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(E_n) : (E_n)_n \subseteq \mathcal{C} \text{ que recubre a } A \right\}.$$

a) Pruebe que μ^* es medida exterior.

Definición 0.2. Se dice que una medida exterior es regular si $\forall A \subseteq \Omega, \exists E \in \mathcal{B}^*$ (donde \mathcal{B}^* es la clase de conjuntos μ^* medibles), $A \subseteq E, \mu^*(E) = \mu^*(A)$.

b) Suponga que μ^* es una medida exterior regular con $\mu^*(\Omega) < +\infty$. Pruebe que

$$E \in \mathcal{B}^* \Leftrightarrow \mu^*(\Omega) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c).$$

Medidas Regulares

P5.- (Para completar lo de auxiliar)

1. a) Sea (X, \mathcal{B}, μ) espacio de medida con X e.t. Hausdorff, con μ y tal que existe un recubrimiento numerable de X por abiertos de medida finita. Probar que todo compacto posee medida finita.
b) Suponga además que X es unión numerable de compactos. Pruebe que μ se puede aproximar interiormente por compactos.
Nota: Éstas son las hipótesis minimales para realizar la aproximación por compactos hecha en la clase del 3 de Abril.
c) Considere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ con $\mu(A) = \text{card}\{x : x \in \mathbb{Q} \cap A\}$. Pruebe que μ es una medida σ -finita y no es regular.
2. Sea X espacio métrico y \mathcal{B} la tribu boreliana de X .
a) Pruebe que si existe $(E_n)_n \subseteq \mathcal{B}$ recubrimiento creciente de X tal que $\bigcup \text{int}(E_n) \neq X$, entonces existe ν medida tal que

$$\nu(E_n) < +\infty \quad \forall n \text{ y } \nu \text{ no es regular.}$$

Hint: Pruebe que existe x_0 tal que para todo abierto $U \ni x_0$ y para todo $n \in \mathbb{N}, U \setminus E_n \neq \emptyset$ y, más aún, este conjunto es infinito. Luego dado $U_n = B(x_0, 1/n)$ escoja una sucesión $(a_i^n)_i \subset U_n \setminus E_n$ y defina

$$\nu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{a_j^n \in A \cap (U_n \setminus E_n)} \frac{1}{j^2}.$$

- b) Sea μ medida σ -finita para la cual existe un recubrimiento numerable por abiertos de medida finita. Probar que μ se puede aproximar interiormente por cerrados y exteriormente por abiertos.

Medidas con signo

P6.- A continuación se muestra un ejemplo de que la descomposición de Hahn-Jordan no es válida si se trabaja sólo con un álgebra. Para ésto se considera $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ con Ω no numerable, \mathcal{F} el álgebra de conjuntos finitos y cofinitos y $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } |A| < \infty \\ -|A^c| & \text{si } |A^c| < \infty \end{cases}$$

Pruebe que μ es una medida con signo y que no es posible obtener la descomposición de Hahn-Jordan.

P7.- Sea (Ω, \mathcal{F}) espacio medible. Se define $M(\Omega)$ el espacio vectorial de las medidas con signo finitas sobre (Ω, \mathcal{F}) (que posee la norma de la variación total), el cual se puede dotar del orden parcial

$$\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_1 \text{ es una medida positiva.}$$

a) Pruebe que dadas $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ existen medidas $\sup(\mu_1, \mu_2)$ e $\inf(\mu_1, \mu_2)$ que $\inf(\mu_1, \mu_2) \leq \mu_i \leq \sup(\mu_1, \mu_2)$ para $i = 1, 2$ y

$$\nu \geq \mu_i, i = 1, 2 \Rightarrow \nu \geq \sup(\mu_1, \mu_2) \quad \text{y} \quad \lambda \leq \mu_i, i = 1, 2 \Rightarrow \lambda \leq \inf(\mu_1, \mu_2).$$

Hint: Considere $\mu(A) = \inf\{\mu_1(A_1) + \mu_2(A_2) : A = A_1 \cup A_2, A_i \in \mathcal{F} \text{ disjuntos}\}$ y note que basta hacerlo para el ínfimo pues $\sup(\mu_1, \mu_2)(A) = -\inf(-\mu_1, -\mu_2)$.

b) Pruebe las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \inf(\mu_1, \mu_2) &= \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 - |\mu_1 - \mu_2|), \\ \sup(\mu_1, \mu_2) &= \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + |\mu_1 - \mu_2|) \end{aligned}$$

c) Si $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ calcule $\sup(\mu, 0)$ e $\inf(\mu, 0)$.

d) Para $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ considere la descomposición de Jordan $\mu = \mu_+ - \mu_-$. Pruebe que $\inf(\mu_+, \mu_-)$ es la medida nula.

Funciones Medibles e Integración

P8.- 1. Sea f derivable en $(0, 1)$. Pruebe que f' es Lebesgue medible.

2. Si f sólo es continua pruebe que las derivadas de Dini por la derecha

$$D^+f(x) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{y} \quad D_+f(x) = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

son medibles.

P9.- Sea $(X, \bar{\mathcal{B}}, \mu)$ (X e.t., $\bar{\mathcal{B}}$ la completación de los borelianos) un espacio de medida completo. Pruebe que si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que existe un recubrimiento de conjuntos medibles $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ con A_0 despreciable y tal que para todo $i \geq 1$ f_{A_i} es semicontinua inferior, entonces f es medible.

P10.- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto denso en \mathbb{R} . Muestre que una función f definida sobre un conjunto medible A , es medible si y solo si $\{x \in A : f(x) \geq c\}$ es medible $\forall c \in \mathcal{D}$.

- P11.-** a) Sea (X, τ, μ) espacio de medida y $f \in L^1$. Pruebe que $\nu : \tau \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\nu(A) = \int_A f d\mu$ define una medida con signo finita. Encuentre ν_+ , ν_- y $|\nu|$.
- b) Sea (X, τ) espacio medible y ν medida con signo finita sobre τ . Se define $L^1(X, \tau, \nu) := L^1(X, \tau, |\nu|)$, y para $f \in L^1(X, \tau, \nu)$,

$$\int f d\nu := \int f d\nu_+ - \int f d\nu_-.$$

Verifique que esta definición tiene sentido, pruebe que $L^1(X, \tau, \nu) = L^1(X, \tau, \nu_+) \cap L^1(X, \tau, \nu_-)$, y que si $\|\nu\|_{VT} = |\nu|(X)$ denota la norma en variación total de ν , entonces

$$\|\nu\|_{VT} = \sup \left\{ \int f d\nu : f \text{ medible acotada t.q. } \|f\|_\infty \leq 1 \right\},$$

donde $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$, y por lo tanto $\nu \in \mathcal{F}_b(X)^*$ (dual topológico), donde $\mathcal{F}_b(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible acotada}\}$.