

MEDIDA e INTEGRACIÓN

Profesor: Joaquín Fontbona

Profesor Auxiliar: Mauricio Duarte

EJERCICIO PROPUESTO

23 MARZO 2005

El objetivo de este problema es construir un conjunto H medible en $[0, 1]$ tal que:

$$\forall I \subseteq [0, 1] \text{ intervalo no vacío, } \mu(H \cap I) > 0 \wedge \mu(H \cap I^C) > 0.$$

donde μ es la medida de Lebesgue.

1. Sea $k \geq 3$ un entero fijo. Construiremos un conjunto de Cantor $\mathcal{C} \subseteq [0, 1]$ cuya medida es $\frac{k-3}{k-2}$. Para ello tomemos inductivamente

$$I_{1,1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \right) \quad E_1 = I_{1,1}$$

A partir de $I_{i,j}$ $1 \leq j \leq 2^i - 1$, $i \leq n$ y $E_i = \bigcup_{j=1}^{2^i-1} I_{i,j}$ definimos la familia de conjuntos $\{J_{n+1,l}\}_{l=1 \dots 2^n}$ que son conexos disjuntos de igual largo $L_n = \frac{1}{2^n} \left\{ 1 - \frac{1}{k} - \frac{2}{k^2} - \dots - \frac{2^{n-1}}{k^n} \right\}$, que es mayor estricto que $\frac{1}{k^{n+1}}$, tales que $\bigcup_{l=1}^{2^n} J_{n+1,l} = [0, 1] \setminus E_n$

Así se construyen $I_{n+1,l}$, $l = 1, \dots, 2^n$ intervalos abiertos, de manera que los centros de $I_{n+1,l}$ y $J_{n+1,l}$ conciden, y cada uno es de largo $\frac{1}{k^{n+1}}$ y $E_{n+1} = \bigcup_{l=1}^{2^{n+1}-1} I_{n+1,l}$.

Defina $\mathcal{C} = [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Pruebe que \mathcal{C} es compacto de interior vacío y cuya medida es

$$\mu(\mathcal{C}) = \frac{k-3}{k-2}.$$

Notar que $0, 1 \in \mathcal{C}$.

En lo que sigue tomaremos $k = 4$ de manera que $\mu(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}$. Análogamente a la construcción previa si $I = [a, b] \subseteq [0, 1]$ un intervalo cerrado de interior no vacío, existe un cerrado $\mathcal{C} \subseteq I$, que denotaremos $\mathcal{C}(I)$, tal que $a, b \in \mathcal{C}(I)$, $\text{int}(\mathcal{C}(I)) = \emptyset$ y $\mu(\mathcal{C}(I)) = \frac{b-a}{2} = \frac{\mu(I)}{2}$.

2. Construiremos inductivamente $(A_n)_{n \geq 1}$, subconjuntos borelianos de $[0, 1]$.

$A_1 = \mathcal{C}([0, 1])$ el conjunto de Cantor que construimos en 1.

Supongamos contruidos A_i , $i = 1 \dots n$ con las propiedades:

- (i) A_i , $i = 1 \dots n$ son disjuntos.
- (ii) $\mu(A_i) = \frac{1}{2^i}$ $i = 1 \dots n$.

(iii) $\overline{A_i} \subseteq \bigcup_{j \leq i} A_j$ y por lo tanto $F_i = \bigcup_{j \leq i} A_j$ es un cerrado.

(iv) $\text{int}(F_i) = \emptyset$, para $i = 1 \dots n$.

Tomemos $[0, 1] \setminus F_n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Theta_{n+1,j}$ disjuntos, donde $\Theta_{n+1,j}$ son intervalos abiertos $\Theta_{n+1,j} =$

(a_j^{n+1}, b_j^{n+1}) , para definir:

$$A_{n+1} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left(\mathcal{C} \left([a_j^{n+1}, b_j^{n+1}] \right) \setminus \{a_j^{n+1}, b_j^{n+1}\} \right).$$

Pruebe que las propiedades (i) ... (iv) se satisfacen para $n + 1$ si se satisfacen hasta n .

Para (iii) tome $x_k \in A_{n+1}$ tal que $x_k \rightarrow \bar{x}$ y razone según si una infinidad de x_k están en un $\Theta_{n+1,j}$ fijo o no.

Para probar (iv) le puede ser útil el siguiente resultado que no necesita probar:

A y B son conjuntos de interior vacío y A es cerrado, entonces $A \cup B$ tiene interior vacío.

Pruebe que $[0, 1] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ tiene medida 0.

Sea $H = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}$ y pruebe que H satisface la propiedad requerida. Para esto, pruebe que $\mu(\Theta_{n+1,j}) \leq \frac{1}{4^n}$ y razone según las componentes conexas que deja F_n .