

MAT331 — Corrigé de l'épreuve hors-classement

EX 1. Soit $B = \{x \mid f(x) > 1\}$. Si B était de mesure > 0 , on aurait d'après le théorème de Beppo Levi

$$\int_X f^n d\mu \geq \int_B f^n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_B \lim_n f^n d\mu = +\infty,$$

la suite des fonctions f^n étant croissante et de limite $+\infty$ sur B .

On a donc $f(x) \leq 1$ presque partout. Soit maintenant $C = \{x \mid f(x) < 1\}$. La suite des fonctions f^n est décroissante et de limite 0 sur C . Les intégrales étant finies, le corollaire du théorème de Beppo Levi montre que $\int_C f^n d\mu \rightarrow 0$. Si on avait $\mu(C) > 0$, on aurait

$$\int_X f^n d\mu = \int_{\mathbb{C}^C} f^n d\mu + \int_C f^n d\mu \leq (1 - \mu(C)) + \int_C f^n d\mu$$

et le membre de droite ne pourrait tendre vers 1.

On a donc $f(x) = 1$ p.p..

EX 2. (a) La fonction Y_p vaut -1 ou 1 selon que ω_p vaut 0 ou 1 . Il est immédiat que $\int Y_p^2 dP = 1$. Pour $p \neq q$, l'intégrale de $Y_p Y_q$ sur $\{\omega \mid \omega_p = \alpha \text{ et } \omega_q = \beta\}$ vaut $1/4$ si $\alpha = \beta$ et $-1/4$ dans le cas contraire et on a donc $\int Y_p Y_q dP = 0$.

(b) Les $\frac{Y_p}{p}$ sont des éléments de $L^2(\Omega)$ qui sont deux à deux orthogonaux, et la somme des carrés de leur norme $\sum \frac{1}{p^2}$ est finie. D'après le théorème 4.1.2, la série converge dans L^2 vers une fonction $F \in L^2$, ce qui signifie que

$$\int \left| F(\omega) - \sum_1^N \frac{Y_p(\omega)}{p} \right|^2 dP \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Les fonctions figurant sous le signe somme tendent vers 0 dans L^1 et, d'après le corollaire 3.2.6, on peut en extraire une sous-suite qui tend vers 0 presque partout. Il existe donc une suite N_k strictement croissante et un ensemble Z de mesure nulle tels que

$$F(\omega) - \sum_1^{N_k} \frac{Y_p(\omega)}{p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ pour } \omega \notin Z.$$

ce qui est le résultat voulu.

(c) Pour $\omega \notin Z$, on a

$$\sum_1^{N_k} \frac{\omega_p}{p} = \frac{N_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_1^{N_k} \frac{Y_p(\omega)}{p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty.$$

La suite des $S_N(\omega) = \sum_1^N \frac{\omega_p}{p}$ est croissante et tend donc soit vers une limite finie, soit vers $+\infty$. Pour $\omega \notin Z$, le premier cas est exclu puisque la sous-suite $S_{N_k}(\omega)$ tend vers l'infini.

EX 3. (a) Il suffit de montrer que, pour $x_n \rightarrow x_0$, on a $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$ et on applique le théorème de Lebesgue. D'une part, $\frac{tx_n}{t^2+x_n^2} f(t) \rightarrow \frac{tx_0}{t^2+x_0^2} f(t)$.

D'autre part, $\left| \frac{tx}{t^2+x^2} f(t) \right| \leq |f(t)|/2$, fonction sommable indépendante de x , d'où le résultat.

(b) On va montrer que, si $[a, b]$ est un intervalle ne contenant pas 0, la fonction F est dérivable sur $[a, b]$. La dérivée partielle par rapport à x de la fonction figurant sous le signe somme existe pour $(x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ et vaut $\frac{t^3-tx^2}{(t^2+x^2)^2} f(t)$. Nous allons montrer, en posant $m = \min(|a|, |b|)$, que cette fonction est majorée en module par la fonction $t \mapsto \frac{1}{2m} |f(t)|$, qui est sommable et indépendante de x . Le théorème de dérivation sous le signe somme permettra de conclure. On a en effet,

$$\left| \frac{t(t^2-x^2)}{(t^2+x^2)^2} \right| \leq \left| \frac{t}{(t^2+x^2)} \right| \leq \left| \frac{t}{(t^2+m^2)} \right| \leq 1/2m.$$

(c) Pour f positive et $x > 0$, on a $F(x) \geq \int_x^{2x} \frac{tx}{t^2+x^2} f(t) dt$. Sur ce domaine d'intégration, le numérateur est minoré par x^2 tandis que le dénominateur est majoré par $5x^2$. On a donc $F(x) \geq \frac{1}{5} \int_x^{2x} f(t) dt$ et

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = F(x)/x \geq \frac{1}{5x} \int_x^{2x} f(t) dt.$$

Pour n'importe quelle fonction sommable f telle que $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = +\infty$, le membre de droite tend vers $+\infty$ pour $x \rightarrow 0$ et la fonction F a une dérivée à droite infinie en 0.

EX 4. *Remarque préliminaire sur la mesurabilité* La fonction K est mesurable dans \mathbb{R}^2 et il en est de même, lorsque f est mesurable sur \mathbb{R} de $(x, y) \mapsto f(y)$ et donc du produit $(x, y) \mapsto K(x, y)f(y)$. Lorsque f est positive, la mesurabilité pour tout x de $y \mapsto K(x, y)f(y)$, et la mesurabilité de Tf résultent du premier théorème de Fubini (th. 2.4.6).

Pour $f \in L^\infty$, la fonction $(x, y) \mapsto K(x, y)f(y)$ n'est pas sommable en général et on ne peut pas appliquer directement le théorème 2.4.7. Par contre, cette fonction est sommable sur $[a, b] \times \mathbb{R}$. Le th. 2.4.7. assure que Tf est sommable et donc mesurable sur tout intervalle borné, et donc mesurable dans \mathbb{R} .

(a) Pour chaque x , la fonction $y \mapsto K(x, y)f(y)$ est majorée en module, pour presque tout y , par $\|f\|_{L^\infty} K(x, y)$. On a donc

$$|Tf(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \int K(x, y) dy \leq M \|f\|_{L^\infty}$$

La fonction Tf est donc bornée et on a $\|Tf\|_{L^\infty} \leq M \|f\|_{L^\infty}$, ce qui exprime que T est continu de L^∞ dans lui-même.

(b) Pour f sommable, la fonction $(x, y) \mapsto K(x, y)f(y)$ est mesurable et on a, d'après le premier théorème de Fubini

$$\iint K(x, y) |f(y)| dx dy = \int \left\{ \int K(x, y) dx \right\} |f(y)| dy \leq \int M |f(y)| dy = M \|f\|_{L^1}. \quad (1)$$

La fonction $(x, y) \mapsto K(x, y)f(y)$ est donc sommable dans \mathbb{R}^2 et le second théorème de Fubini assure que

— La fonction $y \mapsto K(x, y)f(y)$ est sommable sur \mathbb{R} pour presque tout x , et

son intégrale est ainsi définie pour presque tout x .

— La fonction Tf , ainsi définie presque partout, est sommable.

On a de plus

$$\|Tf\|_{L^1} = \int |Tf(x)| \, dx \leq \int \left\{ \int K(x, y) |f(y)| \, dy \right\} \, dx \leq M \|f\|_{L^1},$$

d'après (1), ce qui montre que T est continu de L^1 dans lui-même.

(c) On écrit la fonction à intégrer sous la forme $\left(\sqrt{K(x, y)K(x, z)} |f(y)| \right) \times \left(\sqrt{K(x, y)K(x, z)} |f(z)| \right)$ et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} & \iiint K(x, y)K(x, z) |f(y)| |f(z)| \, dx \, dy \, dz \\ & \leq \left[\iiint K(x, y)K(x, z) |f(y)|^2 \, dx \, dy \, dz \right]^{\frac{1}{2}} \left[\iiint K(x, y)K(x, z) |f(z)|^2 \, dx \, dy \, dz \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On calcule le premier crochet en utilisant le théorème de Fubini. En intégrant d'abord en z , on la majore par $M \iint K(x, y) |f(y)|^2 \, dx \, dy$, puis, en intégrant en x , par $M^2 \int |f(y)|^2 \, dy$ et enfin par $M^2 \|f\|_{L^2}^2$. Le second crochet se majore de même, et on obtient

$$\iiint K(x, y)K(x, z) |f(y)| |f(z)| \, dx \, dy \, dz \leq M^2 \|f\|_{L^2}^2 \quad (2)$$

(d) On sait maintenant que la fonction $(x, y, z) \mapsto K(x, y)K(x, z)\overline{f(y)}f(z)$ est sommable. Le théorème de Fubini assure que $|Tf(x)|^2 = \overline{Tf(x)}Tf(x)$ est défini pour presque tout x comme intégrale d'une fonction sommable, et que cette fonction de x est elle-même sommable. On a donc $Tf \in L^2$. De plus

$$\|Tf\|_{L^2}^2 = \iiint K(x, y)K(x, z)\overline{f(y)}f(z) \, dx \, dy \, dz \leq M^2 \|f\|_{L^2}^2$$

d'après (2). On a donc $\|Tf\|_{L^2} \leq M \|f\|_{L^2}$, ce qui exprime que T est continu de L^2 dans lui-même.

(e) Il suffit de montrer que l'on a l'inégalité (2), la partie (d) pouvant alors être reproduite sans changement. On écrit cette fois-ci

$$\begin{aligned} & \iiint K(x, y)K(x, z) |f(y)| |f(z)| \, dx \, dy \, dz \\ & = \iiint \left(\sqrt{K(x, y)K(x, z)\frac{w(y)}{w(z)}} |f(z)| \right) \left(\sqrt{K(x, y)K(x, z)\frac{w(z)}{w(y)}} |f(y)| \right) \, dx \, dy \, dz \\ & \leq \left[\iiint K(x, y)K(x, z)\frac{w(y)}{w(z)} |f(z)|^2 \, dx \, dy \, dz \right]^{1/2} \times \left[\dots \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

On majore le premier crochet par $M \iint K(x, z)\frac{w(x)}{w(z)} |f(z)|^2 \, dx \, dz$, puis par $M^2 \int |f(z)|^2 \, dz$ et donc par $M^2 \|f\|_{L^2}^2$. La majoration du second crochet est identique, d'où le résultat.