

Corrigé de l'épreuve d'“Intégration et analyse hilbertienne”

Exercice 1. a) Si on note $B_k = \{\omega \in \Omega; \omega_k = 0 \text{ et } \omega_{k+1} = 1\}$, alors, pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$T^{-1}(]-\infty, a]) = \cup_{1 \leq j \leq a} B_j.$$

Comme les $(B_k)_k$ sont des boréliens, pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $T^{-1}(]-\infty, a])$ est un borélien de Ω . T est donc mesurable.

b) On calcule facilement $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{4}$.

c) On remarque que, si $T(\omega) = n$ alors, si 0 apparaît parmi les $n - 1$ premières “décimales” de ω , les “décimales” suivant ce 0 jusqu'à la n^e “décimale” sont toutes égales à 0. Par conséquent, $A_n = \cup_{j=0}^{n-1} C_{s_j}$ où $s_j = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, 1)$ est la suite finie de longueur $n + 1$ composée de j fois la “décimale” 1 puis, $n - j$ fois la “décimale” 0, puis, finalement, la “décimale” 1. Les $(C_{s_j})_j$ sont deux à deux disjoints et chacun de probabilité égale à 2^{-n-1} . On obtient ainsi

$$P(A_n) = \frac{n}{2^{n+1}}.$$

d) L'ensemble $A_\infty = \{\omega \in \Omega; T(\omega) = +\infty\}$ est composé des suites ω formées par d'abord une suite de longueur finie (peut-être nulle) de 1, puis une suite infinie de 0. L'application associant à $\omega \in A_\infty$ la longueur de sa sous-suite de 1 réalise clairement une bijection de A_∞ dans \mathbb{N} . A_∞ est donc dénombrable.

Comme T prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}^*$, la question c) montre que

$$T_*P = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^{n+1}} \delta_n.$$

Exercice 2. a) L'inégalité triangulaire donne

$$\frac{|x + y|}{1 + (x - y)^2} \leq \frac{2|x| + |x - y|}{1 + (x - y)^2}.$$

Comme, pour $x \geq 0$, $\frac{1}{1 + x^2} \leq 1$ et $\frac{x}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2}$, on obtient immédiatement l'estimation souhaitée.

b) Posons $h(x, y) = \frac{x + y}{1 + (x - y)^2} f(y)$. Pour tout x , la fonction $y \mapsto h(x, y)$ est mesurable. De plus, d'après la question précédente, pour tout x et y , $|h(x, y)| \leq (1 + 2|x|)|f(y)|$. Comme f est sommable, $y \mapsto h(x, y)$ est sommable et $g(x)$ existe.

D'autre part, pour tout y , l'application $x \mapsto h(x, y)$ est continue sur \mathbb{R} . Pour $a < b$ deux réels, la majoration précédente de h nous dit que $\sup_{x \in [a, b[} |h(x, y)| \leq (1 + 2(|a| + |b|))|f(y)|$. Cette dernière fonction étant sommable, on peut appliquer le Théorème de continuité sous le signe somme à h pour obtenir la continuité de g sur $]a, b[$. Comme $a < b$ sont arbitraires, on en déduit que g est continue sur \mathbb{R} .

c) Considérons la fonction $\frac{|h(x, y)|}{1 + 2|x|}$. Elle est positive et mesurable. On calcule

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{|h(x, y)|}{1 + 2|x|} dx &\leq |f(y)| \int_{\mathbb{R}} \frac{2|x| + |x - y|}{(1 + (x - y)^2)(1 + 2|x|)} dx \\ &= |f(y)| \int_{\mathbb{R}} \frac{|x - y|}{(1 + (x - y)^2)(1 + 2|x|)} dx + |f(y)| \int_{\mathbb{R}} \frac{2|x|}{(1 + (x - y)^2)(1 + 2|x|)} dx. \end{aligned}$$

Pour estimer la première intégrale, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; ceci donne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{|h(x, y)|}{1 + 2|x|} dx &\leq |f(y)| \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{|x - y|^2}{(1 + (x - y)^2)^2} dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + 2|x|)^2} dx} + |f(y)| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + (x - y)^2} dx \\
&\leq \left(\sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + 2|x|)^2} dx} + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x^2} dx \right) |f(y)| \\
&\leq \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \pi \right) |f(y)|. \quad \left[\begin{array}{l} \text{Il n'est pas nécessaire de calculer ces intégrales} \\ \text{Il suffit bien sûr de dire qu'elles sont finies} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Comme f est sommable, on peut intégrer l'inégalité ci-dessus et appliquer le Théorème de Fubini pour les fonctions positives pour obtenir la sommabilité de $(x, y) \mapsto \frac{h(x, y)}{1 + 2|x|}$. Le Théorème de

Fubini nous dit alors que la fonction $x \mapsto \frac{g(x)}{1 + 2|x|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{h(x, y)}{1 + 2|x|} dy$ est sommable et que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{1 + 2|x|} dx \leq \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|h(x, y)|}{1 + 2|x|} dx dy \leq \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \pi \right) \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy. \quad (1)$$

La linéarité de l'application $f \mapsto \frac{g(\cdot)}{1 + 2|\cdot|}$ est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale. L'inégalité (1) exprime la continuité de cette application.

d) D'après la question b), pour tout x , la fonction $y \mapsto h(x, y)$ est sommable sur \mathbb{R} . Pour tout y , la fonction $x \mapsto h(x, y)$ est dérivable sur \mathbb{R} . Sa dérivée satisfait

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right| &= \left| \frac{1 + (x - y)^2 - 2(x^2 - y^2)}{(1 + (x - y)^2)^2} \right| |f(y)| \leq \frac{1 + 3(x - y)^2 + 4|x - y||x|}{(1 + (x - y)^2)^2} |f(y)| \\
&\leq (3 + 2|x|) |f(y)|.
\end{aligned}$$

Donc, pour $a < b$ et $x \in]a, b[$, on a

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right| \leq (3 + 2(|a| + |b|)) |f(y)|.$$

Cette dernière fonction étant intégrable, on peut appliquer le Théorème de dérivation sous le signe somme qui prouve la dérivabilité de g sur $]a, b[$ pour tout $a < b$, soit la dérivabilité de g sur \mathbb{R} .

e) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre que, pour tout x , la fonction $y \mapsto h(x, y)$ est intégrable ce qui démontrera l'existence de g . En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{|x + y|}{1 + (x - y)^2} |f(y)| dy &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{(|x| + |x - y|)^2}{(1 + (x - y)^2)^2} dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dx} \\
&\leq \sqrt{2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^2 + |x - y|^2}{(1 + (x - y)^2)^2} dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dx} \\
&\leq \sqrt{\pi |x|^2 + \frac{\pi}{2}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dx}.
\end{aligned}$$

Ceci nous donne immédiatement que, pour tout x , $|g(x)| \leq \sqrt{\pi} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} (1 + |x|)$.

Exercice 3. a) Comme $x \mapsto e^{-\varphi(x)}$ est positive et mesurable, on utilise le Théorème de Fubini et la positivité de φ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varphi(x)} dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\varphi(x)}^{+\infty} e^{-t} dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} e^{-t} \mathbf{1}_{\{\varphi(x) \leq t\}} dt dx = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{\varphi(x) \leq t\}} dx \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} \left(\int_{\{\varphi(x) \leq t\}} dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} a(t) dt. \end{aligned}$$

b) Soit $t > 0$. On fait le changement de variable $x \mapsto t^{1/\alpha} x$ pour obtenir

$$a(t) = \int_{\{\varphi(x) \leq t\}} dx = t^{d/\alpha} \int_{\{\varphi(t^{1/\alpha} x) \leq t\}} dx = t^{d/\alpha} \int_{\{t\varphi(x) \leq t\}} dx = t^{d/\alpha} \int_{\{\varphi(x) \leq 1\}} dx = t^{d/\alpha} a(1)$$

la troisième égalité découlant de l'homogénéité de φ . Donc, a est homogène de degré $\frac{d}{\alpha}$. On calcule

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} a(t) dt = a(1) \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} t^{d/\alpha} dt = \Gamma\left(\frac{d}{\alpha} + 1\right) a(1)$$

c) On pose $\varphi(x) = \sum_{j=1}^d a_j^2 x_j^2$. En utilisant le Théorème de Fubini et les questions précédentes, on obtient alors que

$$\lambda(E) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varphi(x)} dx = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-a_j^2 x^2} dx = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \prod_{j=1}^d a_j}.$$

Exercice 4. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche h continue à support compact et vérifiant $\int_{\mathbb{R}} h(x)(1+x^2)dx = 0$ telle que $\|f - h\|_{L^2} \leq \varepsilon$.

Comme l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe g continue à support compact telle que $\|f - g\|_{L^2} \leq \varepsilon/2$. On note $l = \int_{\mathbb{R}} g(x)(1+x^2)dx$. Si $l = 0$, on prend $h = g$. Si $l \neq 0$, on va montrer qu'il existe une fonction ψ continue à support compact telle que $\int \psi(x)(1+x^2)dx = |l|$ et $\|\psi\|_{L^2} \leq \varepsilon/2$. La fonction $h = g \pm \psi$ possèdera alors la propriété voulue.

Il est d'abord facile de choisir une fonction continue et positive φ , à support dans $[0, 1]$, et assez petite pour avoir $\|\varphi\|_{L^2} \leq \varepsilon/2$ et $0 < \int \varphi(x)(1+x^2)dx < |l|$. On pose $\varphi_a(x) = \varphi(x-a)$ pour $a \geq 0$. On a

$$\|\varphi_a\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2} \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_a(x)(1+x^2)dx = \int_0^1 \varphi(y)(1+(y+a)^2)dy.$$

L'intégrale de droite est une fonction croissante et continue (Lebesgue) de a . Elle tend vers $+\infty$ pour $a \rightarrow +\infty$ (Beppo Levi). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une valeur de a pour laquelle l'intégrale vaut $|l|$, et il suffit de poser alors $\psi = \varphi_a$.

La fonction $x \mapsto g(x) = (1+x^2)^{-1}$ est de carré sommable. L'ensemble $\{g\}^\perp$ des éléments de L^2 orthogonaux à g est un sous-espace vectoriel fermé distinct de L^2 (son orthogonal contient g). Comme $\{g\}^\perp$ contient G , il contient aussi son adhérence \overline{G} . Ce dernier espace est strictement plus petit que L^2 et G n'est donc pas dense.