

EXAMEN

Prof. Jaime San Martín

Aux. Arturo Prat

Pregunta 1 : Consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, IP)$ un espacio de Probabilidades. Diremos que una secuencia de variables aleatorias (X_n) converge en distribución a X variable aleatoria si para cualquier función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua acotada se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} IE(f(X_n)) = IE(f(X)).$$

Diremos además que (X_n) es uniformemente integrable (UI) si

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_n IE(|X_n| 1_{\{|X_n| \geq a\}}) = 0.$$

Pruebe que si (X_n) converge en distribución a X y si (X_n) es UI entonces X^+ es integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} IE(X_n^+) = IE(X^+).$$

Pruebe finalmente que bajo las mismas hipótesis se tiene: X es integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} IE(X_n) = IE(X).$$

Indicación: utilice una truncación de la parte positiva como la siguiente

$$\phi_r(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq r \\ r & r \leq x \\ 0 & x \leq 0 \end{cases},$$

Pregunta 2 : Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Definimos la función maximal como

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

donde $B(x,r)$ es la bola de centro x de radio r , y $m(\bullet)$ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . Probaremos que existe una constante A que sólo depende de la dimensión tal que

$$m(\{x: M(f)(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \int |f(y)| dy.$$

(Se dice en análisis que la función maximal es weak-type $(1,1)$).

- (i) Para probar este teorema se necesita el siguiente lema. Supongamos que el conjunto medible E es cubierto por una colección de bolas $B = \{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ cuyos radios están uniformemente acotados: $\sup\{\text{rad}(B_\lambda) : \lambda \in \Lambda\} < \infty$. Probaremos que existe una subcolección numerable y disjunta $\{B_k\} \subseteq B$ tal que

$$m(E) \leq 5^n \sum_k m(B_k).$$

Para ello considere el siguiente procedimiento inductivo: tome B_1 cualquier bola de B tal que $\text{rad}(B_1) \geq 1/2 \sup\{\text{rad}(B_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$. Una vez definidos B_1, \dots, B_k tomemos si es que existe B_{k+1} disjunta de las anteriores y tal que $\text{rad}(B_{k+1}) \geq 1/2 \sup\{\text{rad}(B_\lambda) : \lambda \in \Lambda \text{ y } B_\lambda \text{ disjunta de } B_1, \dots, B_k\}$. Este procedimiento en principio podría ser infinito. En el caso que $\sum_k m(B_k) = \infty$ no hay nada que probar.

En caso contrario supondremos que $\sum_k m(B_k) < \infty$ y en particular $\text{rad}(B_k) \rightarrow 0$.

Para cada k consideremos B_k^* la bola de centro el mismo que B_k y radio 5 veces mayor. Demuestre que para cada B_λ existe un k tal que $B_\lambda \subseteq B_k^*$. Razone por contradicción tome j el menor índice tal que B_j intersecta a B_λ (por qué existe?) y use la forma como fue elegida B_j .

- (ii) Probaremos ahora el teorema. Si $M(f)(x) > \alpha$, encuentre una bola $B(x, r)$ tal que $m(B(x, r)) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$ y aplique el lema.

Recuerde que $m(B(x, r)) = m(B(0, 1))r^n$.