

Tarea 1 Teoría de la Medida

2003

Profesor: Alejandro Maass

Problemas

P1.- Sea $\Omega \neq \emptyset$, conjunto y $\alpha = \{A_1, \dots, A_n\}$, partición de Ω . Calcular $\beta(\alpha)$.

P2.- Sea $\Omega \neq \emptyset$, β una σ -álgebra, \mathcal{A} un álgebra y \mathcal{M} una clase monótona, de $\mathcal{P}(\Omega)$. Dado $A \in \beta$, definimos:

- $\beta_A = \{A \cap B : B \in \beta\}$.
- $\mathcal{A}_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{A}\}$.
- $\mathcal{M}_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{M}\}$.

Verificar si:

- a) β_A es σ -álgebra de $\mathcal{P}(A)$.
- b) \mathcal{A}_A es álgebra de $\mathcal{P}(A)$.
- c) \mathcal{M}_A es clase monótona de $\mathcal{P}(A)$.

En caso de que no sea así, dé un ejemplo.

P3.- Sean $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ conjuntos $\neq \emptyset$ y $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ semi-álgebras de $\mathcal{P}(\Omega_1), \dots, \mathcal{P}(\Omega_n)$ respectivamente. Se define:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n = \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{S}_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Verificar que \mathcal{S} es semi-álgebra de $\mathcal{P}(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n)$.

P4.- Proponer una semi-álgebra para \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

P5.- Considerar $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ($x \in \Omega$, $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$) y los *cilindros* en Ω , con la notación siguiente:

- **Cilindro.**

$$[a_0 \dots a_{n-1}]_k = \{x \in \Omega : x_k = a_0, \dots, x_{k+n-1} = a_{n-1}\} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1\}.$$

- **Cilindro Consecutivo.**

$$c(a_0, \dots, a_{n-1}; i_0, \dots, i_{n-1}) = \{x \in \Omega : x_{i_0} = a_0, \dots, x_{i_{n-1}} = a_{n-1}\}$$

$$\text{con } i_0, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1\}.$$

Tomando $\mathcal{S} = \{C \subset \Omega : C \text{ es cilindro}\}$ y $\mathcal{S}' = \{C \subset \Omega : C \text{ es cilindro consecutivo}\}$, probar que $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}(\mathcal{S}')$.

P6.- Sea \mathcal{S} la semi-álgebra de los cilindros en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, dada $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, definida, para $C = c(a_0, \dots, a_{n-1}; i_0, \dots, i_{n-1}) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, por:

$$\mu(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Verificar que μ es *aditiva*.