

Control 1. MA680 - Análisis de Doctorado 5 de Mayo, 2006

Prof. J. Dávila

Pregunta 1. Sean (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida y $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles tales que

$$f_n \rightarrow f \text{ en medida}$$

existe $g \in L^1(\mu)$ tal que para todo n , $|f_n| \leq g$ μ -c.t.p.

Pruebe que $f_n, f \in L^1(\mu)$ y $f_n \rightarrow f$ en L^1 .

Pregunta 2. Sean F y $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ subconjuntos medibles de \mathbb{R}^2 , con $m^2(E_1) < +\infty$ y $F \subset E_k \forall k \geq 1$.

a) Suponiendo que $\lim_{k \rightarrow +\infty} m^1((E_k)_x) = m^1(F_x)$ c.t.p $x \in \mathbb{R}$ pruebe que $\lim_{k \rightarrow +\infty} m^1(E_k^y) = m^1(F^y)$ c.t.p $y \in \mathbb{R}$.

Recuerdo: $E_x = \{y \in \mathbb{R} / (x, y) \in E\}$, $E^y = \{x \in \mathbb{R} / (x, y) \in E\}$. m^n denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

b) Dé un ejemplo que muestre que la hipótesis $m^1(E_1) < +\infty$ es necesaria.

Pregunta 3. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida finita. Definamos la relación de equivalencia en \mathcal{M}

$$E \sim F \iff \mu(E \Delta F) = 0.$$

En \mathcal{M}/\sim definimos $d(E, F) = \mu(E \Delta F)$. Verifique que d está bien definida y determina una métrica en \mathcal{M}/\sim .

Pruebe también $(\mathcal{M}/\sim, d)$ es separable si y sólo si $L^1(\mu)$ es separable.

Pregunta 4. Sean μ_1, ν_1 medidas σ -finitas en (X_1, \mathcal{M}_1) y μ_2, ν_2 medidas σ -finitas en (X_2, \mathcal{M}_2) tales que $\nu_1 \ll \mu_1$, $\nu_2 \ll \mu_2$. Pruebe que $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ y

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2) \quad \mu_1 \times \mu_2\text{-c.t.p.}$$

Pregunta 5. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida y $(f_i)_{i \in I}$ una familia de funciones positivas en L^1 . El objetivo es construir una función f medible que cumpla

$$\forall i \in I \quad f \leq f_i \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

si $g \geq 0$ es medible y para todo i , $g \leq f_i$ μ -c.t.p, entonces $g \leq f$ μ -c.t.p.

f se llamará el ínfimo esencial de la familia $(f_i)_{i \in I}$.

a) Demuestre que si la familia tiene un ínfimo esencial, éste es único.

b) Definamos

$$\alpha = \inf \left\{ \int \inf_{i \in J} f_i d\mu / J \subset I, J \text{ es numerable} \right\}.$$

Pruebe que existe $J \subset I$ numerable tal que si $f = \inf_{i \in J} f_i$ entonces $\alpha = \int f d\mu$. Verifique que esta f es el ínfimo esencial de $(f_i)_{i \in I}$.

TIEMPO : 4 HORAS

Control 1. MA680 – Análisis de Doctorado 28 de Agosto, 2006

Prof.: S. Martínez y J. Dávila

Pregunta 1. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida. $\mathcal{F} \subseteq L^1(\mu)$ se dice equi-integrable si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall E \in \mathcal{M} \text{ con } \mu(E) < \delta.$$

a) Probar que si $\mathcal{F} \subseteq L^1(\mu)$ es finito entonces es equi-integrable.

b) (Teo. de Vitali) Si se cumple:

- i) X tiene medida finita,
- ii) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1(\mu)$ es equi-integrable,
- iii) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ c.t.p.,
- iv) $|f(x)| < \infty$ c.t.p.

entonces $f \in L^1(\mu)$ y $f_n \rightarrow f$ en $L^1(\mu)$. Ind.: teo. de Egoroff.

c) Sea $X = \mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue. Mostrar un ejemplo de sucesión $\{f_n\}$ con $\|f_n\|_{L^1}$ acotada y que cumple ii)-iv) pero tal que $\|f_n - f\|_{L^1} \not\rightarrow 0$.

d) Verificar que la hipótesis iv) es redundante si X es un intervalo acotado de \mathbb{R} y μ la medida de Lebesgue (existen espacios donde iv) no es redundante).

e) Mostrar que del teorema de Vitali se deduce el teorema de convergencia dominada de Lebesgue en espacios de medida finita.

f) Construir una sucesión f_n en $L^1(0,1)$ tal que $f_n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in (0,1)$, $\int_0^1 f_n \rightarrow 0$, pero tal que $\{f_n\}$ no sea uniformemente integrable.

g) Suponiendo que X tiene medida finita y que $f_n \in L^1(\mu)$ es tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \text{ existe } \forall E \in \mathcal{M}$$

probar que $\{f_n\}$ es equi-integrable.

Ind.: considere \mathcal{M} módulo conjuntos de medida cero con la distancia $\rho(E, F) = \int_X |\chi_E - \chi_F|$ para $E, F \in \mathcal{M}$, que lo hace completo. Utilice el teorema de Baire para probar que dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$A_N = \left\{ E \mid \left| \int_E (f_n - f_m) \right| \leq \varepsilon \forall n, m \geq N \right\}$$

tiene interior no vacío. Deducir que dado $\varepsilon > 0$ existen $E_0 \in \mathcal{M}$, $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left| \int_E (f_n - f_N) d\mu \right| \leq \varepsilon \quad \text{si } \rho(E, E_0) < \delta, n \geq N.$$

Pregunta 2. Denotemos por X el espacio de las medidas de Borel complejas sobre \mathbb{R} con la norma $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$. Para $\mu, \lambda \in X$ se define su convolución mediante

$$\mu * \lambda(E) = (\mu \times \lambda)(E_2)$$

para $E \subset \mathbb{R}$ Boreliano donde

$$E_2 = \{(x, y) / x + y \in E\}.$$

a) Demostrar que si $\mu, \lambda \in X$ entonces $\mu * \lambda \in X$.

- b) Probar que $\nu = \mu * \lambda$ es la única medida de Borel compleja sobre \mathbb{R} tal que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\nu = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) d\mu(x) d\lambda(y) \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R})$$

- c) Probar que la convolución en X es asociativa, conmutativa y distribuye con respecto a la suma. Verificar además que tiene elemento neutro.

- d) Demostrar la fórmula: si $E \subseteq \mathbb{R}$ es Boreliano entonces

$$\mu * \lambda(E) = \int_{\mathbb{R}} \mu(E-t) d\lambda(t)$$

(justificar todos los pasos).

- e) Sea m la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Probar que si $\mu \ll m$ entonces $\mu * \lambda \ll m$ y dar una fórmula para $\frac{d(\mu * \lambda)}{dm}$ en función de $\frac{d\mu}{dm}$.

MEDIDA e INTEGRACIÓN

Profesor: Joaquín Fontbona

EJERCICIOS PROPUESTOS 1

14 DE MARZO DE 2006

Problema 1.

(i) Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{F} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Muestre que

$$\sigma(\mathcal{F}) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| \leq |\mathbb{N}| \vee |A^c| \leq |\mathbb{N}|\}.$$

(ii) Sumas arbitrarias de terminos positivos. Para un conjunto Λ infinito cualquiera y $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathbb{R}_+$ se define

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda := \sup \left\{ \sum_{k \in K} a_k \mid K \subseteq \Lambda \text{ finito} \right\}$$

Pruebe que si $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ es finita, entonces el conjunto $\{\lambda \in \Lambda \mid a_\lambda > 0\}$ es a lo más

numerable. (Considere $\{\lambda \in \Lambda \mid a_\lambda > \frac{1}{n}\}$, para $n \in \mathbb{N}$)

(iii) Sea $\{A_n\}$ una partición numerable de X . Si definimos $\mathcal{F} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ muestre que

$$\sigma(\mathcal{F}) = \left\{ \bigcup_{n \in K} A_n \mid K \subseteq \mathbb{N} \right\}.$$

Explicite $\sigma(\{A\})$ para $A \subseteq X$.

(iv) Sean (X, τ) e (Y, Σ) dos espacios medibles y $f : X \rightarrow Y$ una función. Pruebe que $\{f^{-1}(A) : A \in \Sigma\}$ y $\{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \tau\}$ son σ -álgebras.

(v) Sea $f : X \rightarrow X$ una función sobreyectiva.

Muestre que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{A \mid f^{-1}(f(A)) = A\}$$

es σ -álgebra.

Problema 2.

Sea $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ -álgebra y $\eta : \tau \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que:

i. η es finitamente aditiva,

ii. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \tau$ y $A_n \nearrow A \in \tau \Rightarrow \eta(A_n) \nearrow \eta(A)$.

Pruebe que η es medida.

Problema 3.

Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un álgebra y $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$. Sea $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida finita. Pruebe que:

$$\forall B \in \mathcal{B}, \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } \mu(A \Delta B) \leq \varepsilon.$$

Problema 4.

Sea (Ω, \mathcal{B}) un espacio medible. Sean $\mu_n : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, una familia de medidas en \mathcal{B} . Suponga que para todo $B \in \mathcal{B}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B) = \mu(B)$. *asumimos que μ es una medida.*

- 1.- Probar que si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, en cada $B \in \mathcal{B}$, entonces $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ es una medida.
- 2.- Probar que si μ toma valores finitos entonces es una medida. Para ello pruebe que μ es aditiva y luego:
 - (a) Pruebe que si μ no es aditiva entonces existe una secuencia decreciente de conjuntos \mathcal{B} -medibles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cuya intersección es vacía y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \varepsilon > 0$.
 - (b) Pruebe que existen dos secuencias estrictamente crecientes de enteros $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$, tales que $n_0 = m_0 = 0$; y para $i \geq 0$, $7\varepsilon/8 \leq \mu_{n_{i+1}}(A_{m_i}) < \infty$ y $\mu_{n_{i+1}}(A_{m_{i+1}}) \leq \varepsilon/8$.
 - (c) Defina para $i \in \mathbb{N}$, $B_i = A_{m_i} \setminus A_{m_{i+1}}$. Pruebe que para todo $k \geq 1$,

$$\mu(A_{m_k}) = \mu(\cup_{i \geq k} B_i) \geq 3\varepsilon/2$$

y concluya.

Problema 5.

Usando Problema 1(II), pruebe que si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona, entonces el conjunto de discontinuidades de F , $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \neq F(x-)\}$ es numerable.

Problema 6.

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad (es decir, un espacio de medida con $P(\Omega) = 1$).

Dos clases $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{P}(C)$ se dicen independientes si $\forall A \in \mathcal{C}_1$ y $B \in \mathcal{C}_2$ se tiene

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Pruebe que si \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son clases independientes, y además son ambas cerradas para intersección entonces $\sigma(\mathcal{C}_1)$ y $\sigma(\mathcal{C}_2)$ son σ -álgebras independientes.

¿finitas?

Ley fuerte de grandes números para variables L^2

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ variables aleatorias independientes tales que $X_n \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotamos $\mu_n := \int X_n d\mathbb{P}$, $r_k^2 := \int (X_k - \mu_k)^2 d\mathbb{P}$ y $S_n := \sum_{k=1}^n (X_k - \mu_k)$.

- a) Suponga que $\mu_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se probará a continuación la desigualdad de Kolmogorov: Para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n r_k^2$$

- i) Defina $A_k = \cap_{j < k} \{|S_j| < \varepsilon\} \cap \{|S_k| \geq \varepsilon\}$ y pruebe que $\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n \int 1_{A_k} S_k^2 d\mathbb{P}$.

- ii) Muestre que $\int S_n^2 d\mathbb{P} \geq \sum_{k=1}^n \int 1_{A_k} S_k^2 d\mathbb{P} + 2 \sum_{k=1}^n \int 1_{A_k} S_k (S_n - S_k) d\mathbb{P}$, y que todos los términos en la última sumatoria son nulos.

- iii) Muestre que $\int S_n^2 d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^n r_k^2$ y concluya el resultado.

- b) Sean ahora $\mu_n \in \mathbb{R}$ cualesquiera (no necesariamente iguales), y asuma que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-2} r_n^2 < \infty.$$

Se probará que las v.a. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfacen la Ley fuerte de grandes números, es decir, que

$$n^{-1} S_n \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \text{ casi seguramente.}$$

- i) Pruebe el Lema de Borel-Cantelli: Si $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ son eventos tales que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_k) < \infty$, entonces $\mathbb{P}(\limsup_{k \rightarrow \infty} B_k) = 0$.

- ii) Sean $\varepsilon > 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$B_k := \bigcup_{2^{k-1} \leq n < 2^k} \{n^{-1} |S_n| \geq \varepsilon\}.$$

Muestre que

$$\mathbb{P}(B_k) \leq (\varepsilon 2^{k-1})^{-2} \sum_{n=1}^{2^k} r_n^2.$$

- iii) Pruebe que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_k) \leq \frac{8}{\varepsilon^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-2} r_n^2.$$

- iv) Deduzca que $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} |S_n| < \varepsilon) = 1$ para cada $\varepsilon > 0$ y concluya el resultado.

En esta pregunta, todos los espacios son c/r a la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d .

- a) Sea $\rho \in L^1$ y $\rho_\varepsilon(x) = \rho(x\varepsilon^{-1})\varepsilon^{-d}$ para $\varepsilon > 0$. Pruebe que para toda función $f \in L^p$ y $p \in [1, \infty]$ se tiene

$$\|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \leq \int \|\tau_{-\varepsilon z}(f) - f\|_p |\rho(z)| dz,$$

donde τ_h es el operador de traslación en $h \in \mathbb{R}^d$. Deduzca que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se tiene que $f * \rho_\varepsilon \rightarrow f$ en L^p para $p \in [1, \infty]$ y $f \in L^p$, y que $f * \rho_\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente para f acotada y uniformemente continua.

- b) Para $\sigma > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$, denotamos por $g_\sigma(x)$ el núcleo gaussiano en \mathbb{R}^d ,

$$g_\sigma(x) := \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{d}{2}}} \exp(-|x|^2/2\sigma^2).$$

(Recuerde que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-|y|^2/2) dy = 1$.)

Sea $p \in [1, \infty]$ y $f \in L^p$. Muestre que

$$\sigma^{2(\frac{d}{2} - \frac{1}{p})} \|f * g_\sigma\|_p \rightarrow 0 \quad (1)$$

cuando $\sigma \rightarrow 0$. Pruebe además que para cada $p \in [1, \infty]$ existe un constante real $C_p > 0$ independiente de σ tal que

$$\|g_\sigma\|_p \leq C_p \sigma^{2(\frac{d}{2} - \frac{1}{p})}.$$

Deduzca que para $f \in L^1$ y $p \in [1, \infty]$ cualesquiera se tiene

$$\sup_{\sigma > 0} \{\sigma^{2(\frac{d}{2} - \frac{1}{p})} \|f * g_\sigma\|_p\} < \infty. \quad (2)$$

- c) Se probará ahora que para $f \in L^1$ y $p \in [1, \infty]$ cualesquiera, se tiene un resultado más fuerte que de la estimación (2):

Muestre que la convergencia (1) también se tiene en este caso (Ind: aproxime f).

Finalmente, pruebe que la convergencia (1) ocurre *uniformemente* en subconjuntos precompactos de L^1 . Es decir, para todo $C \subseteq L^1$ precompacto, se tiene

$$\sup_{f \in C} \{\sigma^{2(\frac{d}{2} - \frac{1}{p})} \|f * g_\sigma\|_p\} \rightarrow 0$$

cuando $\sigma \rightarrow 0$.

$$1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

$$(1) \|f * g_\sigma\|_p \leq (2) \|f\|_1 \cdot \|g_\sigma\|_p$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \quad \text{iii}$$

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliares: Aitor Aldunate, Jorge Lemus.

Tiempo: 4 hrs.

Problema I

Sea X un conjunto y $\mathcal{B}(X)$ el espacio de funciones acotadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

a) (1.0) Sea $H \subseteq \mathcal{B}(X)$ un subespacio vectorial tal que

i) H contiene a las constantes

ii) Para toda sucesión creciente $\{f_n\}$ de elementos de H tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in X} |f_n(x)| < \infty$ se tiene que $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in H$.

Sea \mathcal{C} una clase de subconjuntos de X cerrada para intersección y suponga que $H \supseteq \{1_A : A \in \mathcal{C}\}$. Pruebe que H contiene a $\{f \in \mathcal{B}(X) : f \text{ es } \sigma(\mathcal{C}) - \beta(\mathbb{R}) \text{ medible}\}$.

b) Sea F un conjunto de funciones a valores reales definidas en X . Se define la tribu generada por F por

$$\sigma(F) := \sigma(\{f^{-1}(C) : f \in F, C \in \beta(\mathbb{R})\}).$$

Pruebe que (0.5)

$$\sigma(F) = \sigma(\{\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(C_i) : f_i \in F, C_i \in \beta(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\}),$$

y que si \mathcal{D} es una clase que genera $\beta(\mathbb{R})$, entonces (1.0)

$$\sigma(F) = \sigma(\{\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(C_i) : f_i \in F, C_i \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}\}).$$

c) Sea $H \subseteq \mathcal{B}(X)$ como en la parte a) y satisfaciendo además

.iii) H es cerrado para la convergencia uniforme

Suponga que $H_0 \subseteq H$ es un subconjunto cerrado para multiplicación. Se probará que H contiene a $\{f \in \mathcal{B}(X) : f \text{ es } \sigma(H_0) - \beta(\mathbb{R}) \text{ medible}\}$.

1) (1.0) Verifique que para todo polinomio p y toda $f \in H_0$ se tiene $p(f) \in H$. Deduzca que para toda función continua $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene $\phi(f) \in H$ para toda $f \in H_0$.

2) (1.0) Ayudándose de la sucesión de funciones $\phi_n(y) := [1 \wedge ((y - a) \vee 0)]^{\frac{1}{n}}$, muestre que para cada $a \in \mathbb{R}$, se tiene $1_{\{f > a\}} \in H$. Pruebe también que para todo $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, y $f_1, \dots, f_k \in H_0$, se tiene $1_{\{f_1 > a_1, \dots, f_k > a_k\}} \in H$.

3) (1.5) Pruebe el resultado deseado.

Problema II

a) (2.0) Convergencia de la norma p a la norma ∞

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida finita y considere $f \in L^\infty(X, \mu)$ con $\|f\|_\infty > 0$. Denotamos para $1 \leq p < \infty$, $\alpha_p := \int_X |f|^p d\mu$. Demuestre que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\alpha_p)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}.$$

Ind.: Muestre que $\alpha_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(\{|f| > \|f\|_\infty - \varepsilon\})$ para todo $\varepsilon \in]0, \|f\|_\infty[$.

$$1. \quad \|A_m\| \leq \frac{|g|^p}{c_m}$$

$$M. \quad \int_{A_m} |f| d\mu = \int \|A_m\| |f|^p d\mu \stackrel{TCB}{\leq} \int \|A\| |f|^p d\mu = \int |g|^p d\mu$$

b) Sea $f(x) = x^{-1/2} 1_{(0,1)}(x)$ y $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración de los racionales, es decir $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $r_n \neq r_m$ si $n \neq m$. Sea $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - r_n)$. Pruebe que:

- i) (1.0) $g < \infty$, λ -c.t.p., donde λ es la medida de Lebesgue, y que $g \in L^1(\lambda)$;
- ii) (1.0) g es discontinua en todo punto y no acotada sobre cualquier intervalo, y ambas propiedades siguen siendo válidas si se modifica g en un conjunto de medida de Lebesgue nula.

c) Sea μ^* una medida exterior sobre X , \mathcal{M}^* la clase de los conjuntos μ^* -medibles, $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}^*}$, y μ_c la medida exterior de Caratheodory definida a partir de $\mu : \mathcal{M}^* \rightarrow \mathbb{R}_+$. Pruebe que:

- i) (1.0) Si $E \subseteq X$, entonces $\mu^*(E) \leq \mu_c(E)$, con igualdad ssi existe $A \in \mathcal{M}^*$ tal que $A \supseteq E$ y $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.
- ii) (1.0) Si existe una medida μ' definida en una semi-álgebra, tal que $\mu^* = \mu'_c$ (la medida exterior de Caratheodory asociada a μ'), entonces $\mu^* = \mu_c$.

Problema III.

El objetivo de esta pregunta es probar el Teorema de convergencia de Vitali (partes b) y c)). En todas las partes se considera un real p tal que $1 \leq p < \infty$.

a) (0.5) Sea $g \in L^p$. Pruebe que para (a_n) y (b_n) sucesiones reales cualesquiera tales que $a_n \rightarrow \infty$ y $b_n \rightarrow 0$, se tiene $\int_{\{|g| \geq a_n\}} |g|^p d\mu \rightarrow 0$ y $\int_{\{|g| \leq b_n\}} |g|^p d\mu \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

En lo que sigue, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$.

b) Suponga que existe $f \in L^p$ tal que $f_n \rightarrow f$ en L^p . Pruebe que las tres propiedades siguientes se cumplen:

(i) (0.5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0;$$

(ii) (1.5) para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $E_\varepsilon \in \mathcal{F}$ con $\mu(E_\varepsilon) < +\infty$ tal que si $G \in \mathcal{F}$ y $G \subseteq (E_\varepsilon)^c$, entonces

$$\int_G |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

(iii) (1.5) para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $E \in \mathcal{F}$ y $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$, entonces

$$\int_E |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

c) (2.0) Pruebe la recíproca de a): si f es una función medible tal que i), ii), iii) se cumplen, entonces $f_n \rightarrow f$ en L^p .

Ind.: Sea $a := \varepsilon [\mu(E_\varepsilon)]^{-1/p}$ y para $n, m \in \mathbb{N}$ considere $H_{nm} := \{x \in E_\varepsilon : |f_n(x) - f_m(x)| \geq a\}$.

Cauchy

$$\frac{|g|}{\text{om}} < 1$$

$$E_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_{nn}$$

$$\mu(E_\varepsilon)$$

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliares: Aitor Aldunate, Jorge Lemus.

Problema I

(X, Σ, μ) denota un espacio de medida.

- i) Sea \mathcal{B} una familia de conjuntos medibles, y \mathcal{C} la familia de uniones numerables de elementos de \mathcal{B} . Muestre que $M := \sup_{A \in \mathcal{C}} \mu(A)$ se alcanza para cierto conjunto $C_* \in \mathcal{C}$

A continuación, (X, Σ, μ) se supone μ finito. Sea $\{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ una familia de medidas de probabilidad en (X, Σ) , y suponga que $\mathbb{P}_\theta \ll \mu$ para todo $\theta \in \Theta$.

- ii) Para cada $\theta \in \Theta$ denotamos $A_\theta := \{\frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mu} > 0\}$. Sean \mathcal{C} y $C_* \in \mathcal{C}$ asociados como en i) a la clase $\mathcal{B} := \{A_\theta : \theta \in \Theta\}$.

Pruebe que para todo $\theta \in \Theta$ se tiene $\mathbb{P}_\theta((C_*)^c) = 0$ (Ind.: Proceda por contradicción).

- iii) Pruebe que la familia $\{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ es equivalente a una subfamilia numerable, es decir, existe $\{\theta_0, \theta_1, \dots\} \subseteq \Theta$ tal que

$$\forall N \in \Sigma: \mathbb{P}_\theta(N) = 0 \forall \theta \in \Theta \text{ ssi } \mathbb{P}_{\theta_n}(N) = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

(Ind.: Puede ser útil probar que $\theta \in \Theta, \mathbb{P}_\theta(N) = 0 \Rightarrow \mu(N \cap A_\theta) = 0$.)

Problema II Desigualdad de Young

Se considera el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, dx)$ con \mathcal{L}^n y dx la tribu y la medida de Lebesgue respectivamente. El objetivo de esta pregunta es probar la desigualdad de Young:

Sean $\bar{m}, p, q \in [1, \infty]$ tales que $\frac{1}{\bar{m}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Entonces para todo $f \in L^p$ y $g \in L^q$, la integral $f * g(x) := \int f(y)g(x-y)dy$ está definida dx-c.t.p., y se tiene

$$f * g \in L^{\bar{m}} \text{ con } \|f * g\|_{\bar{m}} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

- a) Sean $p, q, r \in [1, \infty]$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$, $p^*, q^*, r^* \in [1, \infty]$ sus respectivos conjugados de Hölder, y $f \in L^p, g \in L^q, h \in L^r$.

$$\text{Definimos } I(f, g, h) := \iint |f(x)g(x-y)h(y)| dx dy.$$

Se probará primero que $I(f, g, h) \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$. Para ello considere las funciones:

$$\alpha(x, y) = |f(x)|^{\frac{p}{p^*}} |g(x-y)|^{\frac{q}{q^*}}, \quad \beta(x, y) = |g(x-y)|^{\frac{q}{q^*}} |h(y)|^{\frac{r}{r^*}} \quad \text{y} \quad \gamma(x, y) = |f(x)|^{\frac{p}{p^*}} |h(y)|^{\frac{r}{r^*}}$$

explícite la relación entre p^*, q^* y r^* , y muestre que $I(f, g, h) \leq \|\alpha\|_{r^*} \|\beta\|_{p^*} \|\gamma\|_{q^*}$. Deduzca la cota buscada para $I(f, g, h)$.

- b) b.i) Pruebe el resultado en los casos $m = 1$ y $m = \infty$.

- b.ii) Pruebe el resultado para $1 < m < \infty$. Se sugiere estudiar primero el operador $h \mapsto \iint f(x)g(x-y)h(y) dx dy$, con f y g positivas.

Problema III

Sean (X, τ_1) e (Y, τ_2) espacios medibles.

Def: Una función $m : X \times \tau_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ se dirá núcleo de transición (n.d.t) si

- Para todo $x \in X$, $m(x, \cdot) : \tau_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una medida.
- Para todo $B \in \tau_2$, la función $x \mapsto m(x, B)$ es τ_1 -medible.

Denotamos la integral de $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ con respecto a $m(x, \cdot)$ (cuando esté definida) por $\int f(y)m(x, dy)$

- a) Considere $\nu : \tau_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ una medida. La integral de $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con respecto a ν se denotará (cuando exista) por $\int f(x)\nu(dx)$.

Se supondrá que $\sup_{x \in X} m(x, Y) < \infty$.

- a.i) Muestre que para todo $C \in \tau_1 \otimes \tau_2$ la función $x \mapsto m(x, C^1(x))$ es τ_1 -medible, donde $C^1(x) = \{y \in Y : (x, y) \in C\}$.
- a.ii) Pruebe que existe una única medida finita en $(X \times Y, \tau_1 \otimes \tau_2)$ que denotaremos por νm , tal que para todo $A \times B \in \tau_1 \times \tau_2$

$$\nu m(A \times B) = \int_A m(x, B)\nu(dx).$$

- a.iii) Verifique que para toda $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ $\tau_1 \otimes \tau_2$ -medible positiva, la función $x \mapsto \int_Y f(x, y)m(x, dy)$ es τ_1 -medible, y justifique la igualdad

$$\iint_{X \times Y} f d\nu m = \int_X \left(\int_Y f(x, y)m(x, dy) \right) \nu(dx)$$

para toda función f $\tau_1 \otimes \tau_2$ -medible positiva o νm -integrable.

El objetivo de las partes b) y c) es probar que toda medida $\mu : \beta(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ de probabilidad admite una representación $\mu = \nu m$ como en a), satisfaciendo además:

- $\nu : \beta(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$ es medida de probabilidad, y
- $m : \mathbb{R}^d \times \beta(\mathbb{R}^{d'}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ es n.d.t. con $m(x, \cdot)$ medida de probabilidad $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

- b) b.i) Denotamos por Σ_1 la σ -álgebra $\{A \times \mathbb{R}^{d'} : A \in \beta(\mathbb{R}^d)\}$. Muestre que $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} \rightarrow \mathbb{R}$ es $\Sigma_1 - \beta(\mathbb{R})$ medible ssi $f(x, y) = f(x)$ (i.e. no depende de la segunda cooordenada) y es $\beta(\mathbb{R}^d) - \beta(\mathbb{R})$ -medible.

- b.ii) Defina $\nu : \beta(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$ por $\nu(A) := \mu(A \times \mathbb{R}^{d'})$. Verifique que ν es una medida de probabilidad, que $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es ν -despreciable ssi $A \times \mathbb{R}^{d'}$ es μ -despreciable, y que $\int_{\mathbb{R}^d} f d\nu = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}} f d\mu$ para toda f $\Sigma_1 - \beta(\mathbb{R})$ -medible positiva.

- b.iii) Sea $B \in \beta(\mathbb{R}^{d'})$ y defina $\hat{\mu}_B : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ por $\hat{\mu}_B(A \times \mathbb{R}^{d'}) = \mu(A \times B)$. Muestre que $\hat{\mu}_B$ y $\mu|_{\Sigma_1}$ son dos medidas finitas, y pruebe que existe una función $p_B : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} \rightarrow \mathbb{R}_+$ medible c/r a Σ_1 y $\beta(\mathbb{R})$, y única $\mu|_{\Sigma_1}$ c.t.p., tal que

$$\hat{\mu}_B(A \times \mathbb{R}^{d'}) = \int_{A \times \mathbb{R}^{d'}} p_B d\mu = \int_A p_B(x)\nu(dx).$$

b.iv) Pruebe que

$$* p_{\emptyset} = 0 \quad \nu\text{-c.t.p. y } p_{\mathbb{R}^d} = 1 \quad \nu\text{-c.t.p.}$$

$$* \forall B, C \in \beta(\mathbb{R}^d), B \cap C = \emptyset \Rightarrow p_{C \cup B} = p_C + p_B \quad \nu\text{-c.t.p., y } B \subseteq C \Rightarrow p_B \leq p_C$$

$$p_B \quad \nu\text{-c.t.p.}$$

$$* B_n, B \in \beta(\mathbb{R}^d) \text{ y } B_n \nearrow B \Rightarrow p_{B_n} \nearrow p_B \quad \nu\text{-c.t.p. cuando } n \rightarrow \infty.$$

c) c.i) Sea $\mathcal{R} \subseteq \beta(\mathbb{R}^d)$ la semiálgebra de rectángulos producto de intervalos semiabiertos de extremos racionales. Pruebe que para todo $B \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ existe una sucesión K_n^B de compactos de \mathbb{R}^d tal que $\mu(\mathbb{R}^d \times K_n^B) \nearrow \mu(\mathbb{R}^d \times B)$.

c.ii) Pruebe que existe un conjunto $N \in \beta(\mathbb{R}^d)$ tal que $\nu(N) = 0$ y para todo $x \in N^c$,

$$* p_{\emptyset}(x) = 0 \text{ y } p_{\mathbb{R}^d}(x) = 1;$$

$$* \forall B, C \in \mathcal{A}(\mathcal{R}) : p_B(x) < \infty, B \cap C = \emptyset \Rightarrow p_{C \cup B}(x) = p_C(x) + p_B(x), \text{ y } C \subseteq B \Rightarrow p_C(x) \leq p_B(x)$$

$$* \forall N \in \mathcal{N}, B_0, \dots, B_N \in \mathcal{A}(\mathcal{R}), p_{\bigcap_{i=1}^N K_{B_i}^N}(x) \nearrow p_{\bigcap_{i=1}^N B_i}(x) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

c.iii) Pruebe que para cada $x \in N^c$, la aplicación $m(x, \cdot) : \mathcal{A}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $m(x, B) := p_B(x)$ es una medida finita. Para esto, considere $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{R})$ conjuntos tales que $B_i \searrow \emptyset$, y pruebe que para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia finita K^0, \dots, K^N de compactos tales que $K^i \subseteq B_i$ para $i = 0, 1, \dots, N$, $p_{\bigcap_{i=1}^N B_i}(x) \leq p_{\bigcap_{i=1}^N K_i}(x) + \varepsilon$ y $\bigcap_{i=1}^N K_i = \emptyset$.

c.iv) Justifique que para cada $x \in N^c$, $m(x, \cdot)$ se extiende a una medida finita en $\beta(\mathbb{R}^d)$. Defina $m(x, \cdot) := \delta_0$ para $x \in N$ y concluya el resultado.

Nota: Si (X, Y) es una variable aleatoria a valores en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ con ley $\mu = \nu m$, entonces $\nu(dx)$ se llama "ley marginal de X " y $m(x, dy)$ se denomina "ley de Y condicional a X ".

Control III Medida e Integración. Junio 2006

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliares: Aitor Aldunate, Jorge Lemus.

Se usará la notación $C_b(\mathbb{R})$ para el espacio de funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas acotadas, y su norma será la uniforme que se denotará $\|\cdot\|_\infty$. $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ denota el espacio de medidas con signo finitas y la norma de variación total se denota por $\|\cdot\|$.

Problema I

- (a) (1 pto.) Sean F y G funciones a variación acotada, continuas por la derecha y tales que $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$. Pruebe que si al menos una de ellas es continua, entonces para $-\infty < a < b < \infty$,

$$\int_{(a,b]} F dG + \int_{(a,b]} G dF = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

- (b) (5 ptos.) Suponga que $\mu, \{\mu_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ (espacio de medidas finitas con signo).

Se dice que μ_n converge vagamente a μ , si $\langle \mu_n, f \rangle \rightarrow \langle \mu, f \rangle$ para toda $f \in C_0(\mathbb{R})$, donde $\langle \mu, f \rangle = \int f d\mu$. Denotamos esta convergencia por $\mu_n \rightarrow \mu$.

Diremos además que μ_n converge debilmente a μ , si $\langle \mu_n, f \rangle \rightarrow \langle \mu, f \rangle$ para toda $f \in C_b(\mathbb{R})$. Esta convergencia se denotará $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Sean $F_n(x) = \mu_n((-\infty, x])$ y $F(x) = \mu((-\infty, x])$.

- (i.1) (2 ptos.) Demuestre que si $\sup_n \|\mu_n\| < \infty$ y $F_n(x) \rightarrow F(x)$ para todo x donde F es continua, entonces $\mu_n \rightarrow \mu$.

- (i.2) (1 pto.) Pruebe que si además $\mu_n \geq 0$ y $\mu_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mu(\mathbb{R})$, entonces $\mu_n \Rightarrow \mu$. Para ello puede serle útil probar que para toda $h \in C_0(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq h \leq 1$, y $f \in C_b(\mathbb{R})$ se tiene

$$\limsup_n |\langle \mu_n, f \rangle - \langle \mu, f \rangle| \leq 2\|f\|_\infty |\mu(\mathbb{R}) - \langle \mu, h \rangle|$$

- (ii) (2 ptos.) Demuestre que si $\mu_n \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sup_n F_n(x)] = 0$, y $\mu_n \rightarrow \mu$, entonces $F_n(x) \rightarrow F(x)$ para todo x donde F es continua.

Problema II

- (a) (3 ptos.) Sean $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $L_\mu(f) = \int f d\mu$. Demuestre que la función que a μ asocia L_μ es una isometría lineal biyectiva de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ en $C_0(\mathbb{R}^n)^*$.

HINT: Puede serle útil probar que si $h = d\mu/d|\mu|$, entonces $|h| = 1$.

- (b) (3 ptos.) Sean $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, se define su convolución $\mu * \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\mu * \nu(E) = \iint \chi_E(x+y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Demuestre que:

- (i) La convolución de medidas es conmutativa y asociativa.

usando a) equivale a 0
→ true

→ true

(ii) Para toda h medible acotada,

$$\int h d(\mu * \nu) = \iint h(x+y) d\mu(x) d\nu(y).$$

(iii) $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|.$

(iv) Si $d\mu = f d\lambda$ y $d\nu = g d\lambda$, donde λ es la medida de Lebesgue, entonces $\mu * \nu$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y $d(\mu * \nu) = (f * g) d\lambda.$

(v) Si X, Y son variables aleatorias independientes a valores en \mathbb{R}^n con leyes μ y ν respectivamente, entonces $X + Y$ tiene ley $\mu * \nu.$

Problema III

Dado un vector aleatorio ξ en \mathbb{R}^n con ley μ , se define su función-característica $\hat{\mu}$ como

$$\hat{\mu}(t) = \int e^{itx} \mu(dx) = \int \cos(tx) \mu(dx) + i \int \sin(tx) \mu(dx) = \mathbb{E}(e^{it\xi}), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

donde tx denota el producto punto en $\mathbb{R}^n.$

(a) (2 ptos.) Demuestre que si μ es una medida de probabilidad sobre \mathbb{R} , entonces

$$\mu\{x : |x| \geq r\} \leq \frac{r}{2} \int_{-2/r}^{2/r} (1 - \hat{\mu}(t)) dt, \quad r > 0.$$

HINT: Note que si $x \geq 2$, entonces $\sin(x) \leq x/2.$

(b) (4 ptos.) Una familia de vectores aleatorios $\{\xi_t\}_{t \in T}$ en \mathbb{R}^n se dice tensa si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \mathbb{P}\{|\xi_t| > r\} = 0.$$

Note que para sucesiones $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ la condición es equivalente a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{|\xi_n| > r\} = 0.$$

A su vez una familia de medidas de probabilidad μ_α sobre \mathbb{R}^n se dice tensa si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{\alpha} \mu_\alpha\{x : |x| > r\} = 0.$$

(i) (2 ptos.) Pruebe que $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ es tensa ssi $c_n \xi_n \rightarrow 0$ en probabilidad para cualquier sucesión de constantes $c_n \geq 0$ tal que $c_n \rightarrow 0.$

HINT: Para probar (\Leftarrow) le puede ser útil proceder por contradicción definiéndose una subsucesión n_k tal que $\inf_k \mathbb{P}\{|\xi_{n_k}| > k\} > 0$, y escogiendo c_n apropiadamente.

(ii) (2 ptos.) Demuestre que una familia de medidas de probabilidad sobre \mathbb{R}^n $\{\mu_\alpha\}$, es tensa ssi $\{\mu_\alpha\}$ es equicontinua en 0 ssi $\{\mu_\alpha\}$ es uniformemente equicontinua en $\mathbb{R}^n.$

HINT: Se recomienda ocupar las partes anteriores de la pregunta.

Duración: 4 Horas

Departamento de Ingeniería Matemática. U de Chile.

MA48C Teoría de la Medida e Integración

EXAMEN

Prof.: Joaquín Fontbona - Aux: A. Aldunate - J. Lemus.

Problema 1

(a) Sean A_1, \dots, A_n conjuntos medibles y $r \in \mathbb{N}$ tales que $\forall x \in [0, 1]$ pertenece al menos a r de estos conjuntos. Probar que al menos uno de los A_i tiene medida de Lebesgue mayor o igual a $\frac{r}{n}$.

(b) Sea (X, τ, μ) espacio de medida y $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles. Suponga que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int |f_k(x)| d\mu(x) < \infty$$

Probar que $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ es convergente c.t.p y además que

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k(x) d\mu(x)$$

(c) Sea A Boreliano de \mathbb{R} . Pruebe que A tiene medida (de Lebesgue) nula ssi $\forall \varepsilon > 0$ existen $\{c_k, d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ intervalos abiertos disjuntos tales que $A \subseteq \cup_k (c_k, d_k)$ y $\sum_k (d_k - c_k) < \varepsilon$.

Problema 2

Sea (X, Σ) espacio medible y $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ el espacio de medidas finitas con signo dotado de la norma de variación total.

(i) Sea $\mu \in \mathcal{M}$ positiva, $\nu \in \mathcal{M}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\|\nu - \mu\| \leq \varepsilon$. Pruebe que si $A \in \Sigma$ es tal que $\mu(A) = 0$, entonces $|\nu(A)| \leq \varepsilon$.

(ii) Usando la parte anterior, pruebe que si $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ es precompacto, entonces existe $\lambda \in \mathcal{M}$ positiva tal que $\nu \ll \lambda$ para todo $\nu \in \mathcal{K}$.

Hint: Recuerde que si λ_n es una sucesión en \mathcal{M} , entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda_n|(\cdot)}{\|\lambda_n\| 2^n}$$

es una medida finita.

Problema 3

Sea (X, Σ, μ) espacio de medida y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible positiva.

(i) Pruebe que $\{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times X : t < f(x)\} \in \beta(\mathbb{R}_+) \otimes \Sigma$.

$$\gamma: \mathbb{R}_+ \times X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (t, x) \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ f(x) \end{pmatrix} \longrightarrow f(x) - t$$

h) Sea $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ de clase C^1 estrictamente creciente y tal $\phi(0) = 0$. Pruebe que

$$\int_X \phi(f(x)) d\mu = \int_0^\infty \phi'(r) \mu\{f > r\} dr$$

partir de acá

Problema 4

Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida σ -finita, $p \in [1, \infty]$.

Diremos que $T : L^p \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ está *Localmente Definida* si dados $f_1, f_2 \in L^p$, $B \in \Sigma$ tales que $f_1 \chi_B = f_2 \chi_B$ μ -c.t.p., entonces $T(f_1, B) = T(f_2, B)$.

Sea $1 \leq p < \infty$ y $T : L^p \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- T está localmente definida.

- $T(f, \cdot)$ es finitamente aditiva $\forall f \in L^p$.

- $T(\cdot, B)$ es lineal continua $\forall B \in \Sigma$.

Demuestre que existe una única función $g \in L^q$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que

$$T(f, B) = \int_B f g d\mu, \forall f \in L^p, \forall B \in \Sigma.$$

Problema 5 (Ley débil de los grandes números)

Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias reales independientes idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}(X_n) = m$ y $\mathbb{E}(X_n^2) = M < \infty$. Demuestre que

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall \varepsilon > 0$$

Hint: Muestre que si Y es una variable aleatoria real, $c \in \mathbb{R}$ y $b > 0, p > 0$ entonces

$$\mathbb{P}(|Y - c| > b) \leq \frac{\mathbb{E}(|Y - c|^p)}{b^p}.$$

Problema 6

Sea $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión decreciente de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} , (i.e. $\mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$, $\forall n \geq 1$), y sea $\{X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 1\}$ una *submartingala backward*, es decir $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$, X_n es \mathcal{F}_n medible, y $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n+1}) \geq X_{n+1}$ \mathbb{P} -c.s., para todo $n \geq 1$. Se probará que si $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) > -\infty$, entonces $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ es uniformemente integrable.

Para ello se procederá como sigue:

(a) Demuestre que $\{X_n^+\}_{n=1}^\infty$ es uniformemente integrable.

Hint: Pruebe que $\sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > \lambda) \rightarrow 0$, cuando $\lambda \rightarrow \infty$, y también muestre que

$$\int_{\{X_n^+ > \lambda\}} X_n^+ d\mathbb{P} \leq \int_{\{X_1^+ > \lambda\}} X_1^+ d\mathbb{P}.$$

(b) Demuestre que $\{X_n^-\}_{n=1}^\infty$ es uniformemente integrable y concluya.

Hint: Muestre que para cualquier $\varepsilon > 0$ existen $m \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ tales que

$$\sup_{n > m} \int_{\{X_n \leq -\lambda\}} |X_n| d\mathbb{P} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Duración 5 Horas.