

MEDIDA E INTEGRACIÓN – CONTROL 3

JAIME SAN MARTÍN & MAURICIO DUARTE.

18 DE JUNIO 2007

P1. Consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función en $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, dx)$. Supondremos que f satisface la condición de Dini en x es decir existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{\delta}^{\delta} \frac{|f(x+z) - f(x)|}{|z|} dz < \infty.$$

Esto representa una cierta continuidad de f en x . Bajo estas condiciones pruebe que

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^A \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda(t-x)) dt d\lambda = f(x).$$

Para ello necesitará probar primero el siguiente lema

Lema 1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, dx)$ entonces

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(Ax) dx = 0.$$

Demostración. Pruebelo primero para $f \in C_0^\infty$. Para ello demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(Ax) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{\cos(Ax)}{A} dx$$

□

Pruebe ahora que

$$J(A) := \frac{1}{\pi} \int_0^A \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda(t-x)) dt d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+z) \frac{\sin(Az)}{z} dz,$$

y usando la famosa identidad $\forall A > 0$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Az)}{z} dz := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \frac{\sin(Az)}{z} dz = 1,$$

deduzca que

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin(Az) dz + \frac{1}{\pi} \int_{|z| \geq N} \frac{f(x+z)}{z} \sin(Az) dz - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|z| \geq N} \frac{\sin(Az)}{z} dz$$

P2. Suponga que μ es una medida de probabilidad en (X, \mathcal{F}) y que, para cada $x \in X$, ν_x es una medida de probabilidad en (Y, \mathcal{G}) . Suponga además que para cada $B \in \mathcal{G}$, $x \mapsto \nu_x(B)$ es una función \mathcal{F} -medible.

- (a) Muestre que, si $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, entonces $x \mapsto \nu_x(\{y \in Y : (x, y) \in E\})$ es una función \mathcal{F} -medible.
 (b) Muestre que $\pi(E) = \int_X \nu_x(\{y \in Y : (x, y) \in E\}) d\mu(x)$, defina una medida de probabilidad en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

Observe que si $\nu_x = \nu$, esto no es más que la definición de medida producto.

- (c) Muestre que si f es una función $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ -medible y no negativa, entonces $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu_x(y)$ es \mathcal{F} -medible. Más aún, muestre que

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\pi(x, y) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\nu_x(y) \right] d\mu(x),$$

lo que extiende el teorema de Fubini (en el caso de probabilidades). Considere además el caso en que f puede ser negativa.

- (d) Sea $\nu(B) = \int_X \nu_x(B) d\mu(x)$. Muestre que $\pi(X \times B) = \nu(B)$ y

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X \left[\int_Y f(y) d\nu_x(y) \right] d\mu(x).$$

P3. Consideremos $X = [0, 1]$. Sea $\ell \in C(X)^*$ medida de Radon positiva y μ la medida regular que representa a ℓ . Pruebe que μ tiene masa finita y concluya que

$$\Phi(\ell) = \sum_{x \in X} \mu(\{x\}),$$

está bien definida. Diga como extender este funcional a todo $C(X)^*$, de manera que resulte lineal. Pruebe que Φ es un funcional lineal continuo sobre $C(X)^*$ y que no existe $f \in C(X)$ tal que

$$\Phi(\ell) = \ell(f).$$

¿Qué se deduce de aquí?

Tiempo: 5 hrs.