

## Control 2 Teoría de la Medida 2003

Profesor: Alejandro Maass  
Profesor Auxiliar: Alberto Mercado  
Tiempo: 5 horas

**P1.**— Sea  $(\Omega, \mathcal{B})$  un espacio medible y  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  una transformación  $\mathcal{B}$ – $\mathcal{B}$ -medible. Sea

$$\mathcal{M}(\Omega, T) = \{\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1] : \mu \text{ es probabilidad}, \mu(T^{-1}B) = \mu(B)\}$$

Se dice que  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, T)$  es ergódica si

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mu(T^{-1}B \Delta B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0 \vee \mu(B) = 1$$

(1.1) Probar que  $\mathcal{M}(\Omega, T)$  es convexo.

(1.2) Probar que  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, T)$  es ergódica si y sólo si  $\mu$  es un punto extremo del convexo  $\mathcal{M}(\Omega, T)$  (esto es, no se puede tener  $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$  con  $p \in (0, 1)$ ,  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\Omega, T)$ ,  $\mu_1 \neq \mu_2$ ). Para esto se aconseja seguir el camino siguiente.

(1.2.1) Probar  $\Leftarrow$ : asuma que  $\mu$  no es ergódica y escriba  $\mu$  como combinación convexa de medidas en  $\mathcal{M}(\Omega, T)$ .

(1.2.2) Para  $\Rightarrow$ : asuma que  $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$  con  $p \in [0, 1]$ ,  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\Omega, T)$ , y pruebe que  $\mu_1 = \mu_2$ . Para ello,

- Pruebe que existe  $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ ,  $f \geq 0$ , tal que  $\mu_1(B) = \int_B f d\mu$ ,  $B \in \mathcal{B}$ .
- Considere  $E = \{w \in \Omega : f(w) < 1\}$  y pruebe que  $\int_{E \setminus T^{-1}E} f d\mu = \int_{T^{-1}E \setminus E} f d\mu$ .
- Concluya que  $f = 1$ .
- Concluya que  $\mu_1 = \mu_2$ .

(1.3) Probar que si  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega, T)$  son ergódicas y  $\mu \neq \nu$  entonces  $\mu \perp \nu$ . (Hint.: use el Teorema de descomposición de Lebesgue)

**P2.**— Sea  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  un espacio de medida.

(2.1)

(2.1.1) Sea  $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ . Probar que

$$\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f| d\mu = 0$$

(2.1.2) Sean  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  y  $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  tal que  $f_n \rightarrow f$  puntualmente cuando  $n \rightarrow \infty$ . Probar que si  $\int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces

- (1)  $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f_n| d\mu = 0$  uniformemente en  $n$ .
- (2)  $\forall \epsilon > 0, \exists A_{\epsilon} \in \mathcal{B}, \mu(A_{\epsilon}) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}, \int_{A_{\epsilon}} |f_n| d\mu < \epsilon$

(Hint.: probar que dado  $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  y  $\epsilon > 0$  existe  $A_{\epsilon} \in \mathcal{B}$  tal que  $\int_{A_{\epsilon}} |g| d\mu < \epsilon$ .)

(2.2) Suponga en esta parte que  $\mu$  es una medida finita. Diremos que una familia  $F$  de funciones en  $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  es *uniformemente integrable* si:

- (i)  $\sup\{\int_{\Omega} |f| d\mu : f \in F\} < \infty$  y
- (ii)  $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f| d\mu = 0$  uniformemente en  $f \in F$ .

(2.2.1) Pruebe que si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1_{\mathbb{R}^+}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  converge puntualmente a  $f$  entonces

$$\left( \int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mu, f \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\Omega, \mathcal{B}, \mu) \right) \Rightarrow \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ es unif. integrable}$$

(Hint.: probar que  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$  y para ello pruebe que  $\int_{\Omega} \min(f_n, f) d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$  y  $\int_{\Omega} \max(f_n, f) d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$ .)

(2.2.2) Considere  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  convergiendo puntualmente a  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Asuma que  $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f_n| d\mu = 0$  uniformemente en  $n$ . Vamos a probar que  $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ . Para ello:

- Pruebe que  $\forall \epsilon > 0, \forall \bar{\epsilon} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, \mu(|f_n - f_m| > \epsilon) \leq \bar{\epsilon}$ .
- Pruebe que  $\|f_n - f_m\|_1 \rightarrow 0$  cuando  $n, m \rightarrow \infty$ .
- Concluya que  $\{\|f_n\|_1 : n \in \mathbb{N}\}$  es acotado y que  $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ .

(2.3) Asuma que  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  es un espacio de medida finito. Sean  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ ,  $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  tal que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a  $f$ . Vamos a probar que

$$\|f_n\|_p \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \|f\|_p \Leftrightarrow f_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f \text{ en } L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$$

cuando  $1 \leq p < \infty$ . Para ello: (2.3.1) Pruebe  $\Leftarrow$ .

(2.3.2) Pruebe  $\Rightarrow$ :

- Pruebe que  $\int_{\Omega} \|f_n\|^p - \|f\|^p d\mu \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$  y que  $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f_n|^p d\mu = 0$  uniformemente en  $n$ .
- Pruebe que para  $1 \leq p < \infty$  se tiene

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} |f_n - f_m|^p d\mu \right)^{1/p} = 0$$

- Concluya que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en  $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ . Llame  $g$  al límite.
- Pruebe que  $\forall \epsilon > 0, \mu(|f_n - g| > \epsilon) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ .
- Concluya que  $g = f$  como elementos de  $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ .

**P3.**– Sea  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  un espacio de medida y  $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Probar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r = \|f\|_{\infty}$$

(es decir el límite existe, pudiendo ser  $\infty$ , y es igual a la norma infinito de  $f$ ).

Para probar este resultado se sugiere:

- Probar el resultado cuando  $\|f\|_{\infty} = 0$ .
- Probar para  $\|f\|_{\infty} > 0$  que  $\liminf_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r \geq \|f\|_{\infty}$ : para cada  $0 < \alpha < \|f\|_{\infty}$  y  $r > 1$  pruebe que
 
$$\|f\|_r^r \geq \alpha^r \mu(A_{\alpha}) \quad \text{y} \quad 0 < \mu(A_{\alpha}) < \infty$$
 donde  $A_{\alpha} = \{w \in \Omega : |f(w)| > \alpha\}$ .
- Probar para  $\infty > \|f\|_{\infty} > 0$  que  $\limsup_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r \leq \|f\|_{\infty}$ .
- Concluir.

**Nota:** Las partes que no pueda resolver durante las 5 horas de control pueden ser entregadas como tarea el día Viernes 30 de Mayo en cátedra. Esto valdrá un 30 % del puntaje total de la parte correspondiente.