

Control 1 MA47C

9 de abril de 2004

4:00hrs

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliar: Mauricio Duarte

I Desigualdad de Kolmogorov para variables aleatorias independientes

Sea $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, I un conjunto y $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ una familia de sub- σ -álgebras de τ ($\mathcal{F}_i \subseteq \tau$ y es σ -álgebra $\forall i \in I$). Denotamos $\bigvee_{i \in I} \mathcal{F}_i := \sigma(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i)$.

1. Diremos $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ son σ -álgebras *independientes* si para todo subconjunto finito $J \subseteq I$ se tiene

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

para todo $A_j \in \mathcal{F}_j$.

- i) Muestre que si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ es una familia de σ -álgebras independientes, entonces para toda familia finita de variables aleatorias $(Y_j)_{j \in J} \subseteq L^\infty(X, \tau, \mathbb{P})$ a valores en \mathbb{R} , tales que para todo $j \in J$ Y_j es \mathcal{F}_j -medible, se tiene

$$\int \prod_{j \in J} Y_j d\mathbb{P} = \prod_{j \in J} \int Y_j d\mathbb{P}.$$

Justifique porque todas las integrales son finitas. Deduzca que si $Y_1, Y_2 \in L^2$, con Y_i \mathcal{F}_{j_i} -medible y $j_1 \neq j_2$, entonces $\int Y_1 Y_2 d\mathbb{P} = \int Y_1 d\mathbb{P} \int Y_2 d\mathbb{P}$.

- iii) Si $(\mathcal{F}_j)_{j \in J}$ y $(\mathcal{F}_k)_{k \in K}$ son dos subfamilias de $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$, pruebe que las σ -álgebras $\mathcal{G} = \bigvee_{j \in J} \mathcal{F}_j$ y $\mathcal{G}' = \bigvee_{k \in K} \mathcal{F}_k$ son independientes.

2. Diremos que variables aleatorias $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ son *independientes* si las σ -álgebras $\sigma(X_n) := \sigma(\{X_n^{-1}(A) : A \in \beta(\mathbb{R})\})$ son independientes.

Sean ahora $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^2$ variables aleatorias independientes tales que $\int X_n d\mathbb{P} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotamos $r_k^2 := \int X_k^2 d\mathbb{P}$ y $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$.

Se probará a continuación la **desigualdad de Kolmogorov**: Para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n r_k^2$$

- i) Defina $A_k = \cap_{j < k} \{|S_j| < \varepsilon\} \cap \{|S_k| \geq \varepsilon\}$. Muestre que $\mathbb{P}(A_k) \leq \varepsilon^{-2} \int \mathbf{1}_{A_k} S_k^2 d\mathbb{P}$ y deduzca que

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n \int \mathbf{1}_{A_k} S_k^2 d\mathbb{P}.$$

- ii) Muestre que $\int S_n^2 d\mathbb{P} \geq \sum_{k=1}^n \int \mathbf{1}_{A_k} S_k^2 d\mathbb{P} + 2 \sum_{k=1}^n \int \mathbf{1}_{A_k} S_k (S_n - S_k) d\mathbb{P}$
- iii) Pruebe que para $k < n$, $\mathbf{1}_{A_k} S_k$ es $(\bigvee_{i=1}^k \sigma_i)$ -medible y $(S_n - S_k)$ es $(\bigvee_{i=k+1}^n \sigma_i)$ -medible.
- iv) Muestre que $\int S_n^2 d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^n r_k^2$ y concluya el resultado.

II Medida y dimensión de Hausdorff

1. Def: Sea (X, ρ) espacio métrico. Diremos que una medida exterior $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ es *métrica* si

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

para todo $A, B \subseteq X$ tales que $\rho(A, B) > 0$, donde $\rho(A, B) := \inf_{(x,y) \in A \times B} \rho(x, y)$.

En lo que sigue, se probará que si $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ es medida exterior métrica, entonces todo boreliano de (X, ρ) es μ^* -medible.

- i) Sea $A \subseteq X$ cualquiera y $F \subseteq X$ un cerrado. Defina $B_n = \{x \in A \setminus F : \rho(\{x\}, F) \geq \frac{1}{n}\}$. Muestre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = A \setminus F$ y que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(B_n).$$

- ii) Defina $C_n := B_{n+1} \setminus B_n$. Muestre que $\rho(C_{n+1}, B_n) \geq \frac{1}{n(n+1)}$.

- iii) Pruebe que $\mu^*(B_{2k+1}) \geq \sum_{j=1}^k \mu^*(C_{2j})$ y $\mu^*(B_{2k}) \geq \sum_{j=1}^k \mu^*(C_{2j-1})$ para todo k .

- iv) Muestre que $\mu^*(A \setminus F) \leq \mu^*(B_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu^*(C_j)$, y deduzca que si $\mu^*(A) < \infty$ entonces $\mu^*(B_n) \rightarrow \mu^*(A \setminus F)$. Concluya el resultado.

2. Sean (X, ρ) un espacio métrico y $\delta > 0, \alpha \geq 0$ reales. Para $A \subseteq X$ escribimos

$$H_{\alpha, \delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{diam}(B_j))^\alpha : A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j, \text{ con } B_j \text{ bolas de diametro } \leq \delta \forall j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Se define la *medida (exterior) de Hausdorff de dimension α* como

$$H_\alpha(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\alpha, \delta}(A)$$

- i) Justifique la existencia de $H_\alpha(A)$ (en $\bar{\mathbb{R}}_+$) y pruebe que $H_{\alpha, \delta}$ y H_α son medidas exteriores métricas.

- ii) Pruebe que si $H_\alpha(A) < \infty$ entonces $H_\beta(A) = 0$ para todo $\beta > \alpha$. Deduzca que

$$\inf\{\alpha \geq 0 : H_\alpha(A) = 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 : H_\alpha(A) = \infty\}.$$

Def: La *dimensión de Hausdorff* de $A \subseteq X$ es

$$\dim_H(A) := \inf\{\alpha \geq 0 : H_\alpha(A) = 0\}$$

- iii) Pruebe que si (X, ρ) es \mathbb{R} con la métrica usual, entonces H_1 es un múltiplo de la medida de Lebesgue.

3. Se demostrará a continuación que para cada $\alpha \in (0, 1)$ existe un "conjunto de Cantor generalizado" $C \subset [0, 1]$ tal que $\mu^*(C) = 1$.

Sea $\xi_n = 2^{-\frac{n}{\alpha}}$ (notar que $\xi_n > 2\xi_{n+1}$). Quitamos a $C_0 := [0, 1]$ un subintervalo abierto centrado de largo $1 - 2\xi_n$, que denotamos por $I(\frac{1}{2})$, obteniendo un conjunto $C_1 := [0, \xi_1] \cup [1 - \xi_1, 1]$. De cada uno de los 2 intervalos $[0, \xi_1]$ y $[1 - \xi_1, 1]$ quitamos subintervalos abiertos centrados de largo $\xi_1 - 2\xi_2$, que denotamos por $I(\frac{1}{4})$ e $I(\frac{3}{4})$, y obtenemos un conjunto C_2 que es la union de cuatro intervalos cerrados de largo ξ_2 .

Inductivamente, construimos C_n quitando de cada uno de los 2^{n-1} intervalos que forman C_{n-1} un subintervalo abierto centrado de largo $\xi_{n-1} - 2\xi_n$. Llamamos $I(2^{-n})$, $I(3 \cdot 2^{-n})$, \dots , $I((2^n - 1)2^{-n})$ a los intervalos retirados, y el conjunto que queda, (que es la unión de 2^n intervalos cerrados de largo ξ_n) es C_n .

Definimos

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

(así, para $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$, C es el conjunto de Cantor usual).

i) Pruebe que $H_\alpha(C) \leq 1$.

ii) Pruebe que si $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento de C por intervalos abiertos, de largos $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$, entonces existe un recubrimiento finito de C por intervalos *cerrados disjuntos* $(A_i)_{i=1}^m$, de largos $(a_i)_{i=1}^m$, tal que

a) $A_i \subseteq [0, 1]$ para todo $i = 1 \dots m$

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 2^n$ y $n = 1 \dots n$ se tiene $I(\frac{k}{2^n}) \cap A_i = \emptyset$

c) $\sum_{i=1}^m a_i^\alpha \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} b_j^\alpha$ (puede usar el hecho que $(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$).

Supondremos los intervalos A_i ordenados de izquierda a derecha.

iii) Deduzca que $[0, 1] \setminus \cup_1^m A_i$ es una unión finita disjunta de intervalos $I(y_1), \dots, I(y_N)$ con $y_1 < \dots < y_N$, y concluya la desigualdad faltante usando el siguiente lema (que no se pide probar):

Lema: Sean $y = \frac{k}{2^n}$ y $z = \frac{k'}{2^{n'}}$ racionales tales que $y < z$, y denotemos por $i(z)$ y $d(y)$ respectivamente los extremos izquierdo de $I(z)$ y derecho de $I(y)$. Entonces $(i(z) - d(y))^\alpha \geq z - y$.