

# MEDIDA e INTEGRACIÓN

Profesor: Joaquín Fontbona

Profesor Auxiliar: Mauricio Duarte

## EJERCICIO PROPUESTO

15 ABRIL 2005

Consideramos  $\Omega$  un espacio métrico compacto<sup>1</sup>. Denotamos por  $\mathcal{C}(\Omega)$  al conjunto de funciones continuas de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  y por  $\mathcal{M}(\Omega)$  al conjunto de las medidas de probabilidad definidas en los borelianos  $\mathcal{B}(\Omega)$ .

Sean  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$  y  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mu_n = \int_{\Omega} f d\mu$  para cada  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ .
- (b)  $\limsup_n \mu_n(C) \leq \mu(C)$  en cada conjunto cerrado  $C \subseteq \Omega$ .
- (c)  $\liminf_n \mu_n(D) \geq \mu(D)$  en cada conjunto abierto  $D \subseteq \Omega$ .
- (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$  en cada  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$  tal que  $\mu(\text{fr}A) = 0$ , donde  $\text{fr}A$  es la frontera del conjunto  $A$ .

Para probar esta proposición se sugiere tomar en cuenta los siguientes pasos:

- Probar que (b)  $\Leftrightarrow$  (c).
- Probar que (a)  $\Rightarrow$  (b) aproximando los conjuntos cerrados por abiertos y usando Lema de Uryshon.
- Probar que (b) y (c)  $\Rightarrow$  (d).
- Para probar que (d)  $\Rightarrow$  (a) se sugiere fijar  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$  y definir  $m = \min_{x \in \Omega} f(x) - 1$  y  $M = \max_{x \in \Omega} f(x) + 1$ . Luego considere la medida  $\nu : \mathcal{B}([m, M]) \rightarrow [0, 1]$  dada por  $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ .

Pruebe que dado  $\varepsilon > 0$  existen reales  $m = t_0 < t_1 < \dots < t_k = M$  tales que  $t_j - t_{j-1} < \varepsilon$  y  $\nu(\{t_j\}) = 0$  en cada  $j \in \{2, \dots, k\}$ .

Defina la partición de  $\Omega$  formada por los átomos  $A_j = \{x \in \Omega : t_{j-1} \leq f(x) < t_j\}$  para  $j \in \{2, \dots, k\}$  y concluya.

*Entregar a más tardar al principio de la clase auxiliar del 27 de Abril.*

---

<sup>1</sup>En principio la compacidad es una hipótesis demasiado fuerte. Se propone como ejercicio adicional discutir las condiciones minimales sobre  $X$  para este problema