

AUXILIAR 2: TEORÍA DE LA MEDIDA

PROFESOR: JAIME SAN MARTÍN

AUXILIARES: MAURO ESCOBAR - FELIPE SUBIABRE

24 DE AGOSTO DE 2010

P1. Medida y Dimensión de Hausdorff

Sean $n \in \mathbb{N}, s, \varepsilon > 0$. Definimos $H_\varepsilon^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ por:

$$H_\varepsilon^s(A) := V(s) \cdot \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{\text{diam}(C_i)}{2} \right)^s : A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i, \text{diam}(C_i) < \varepsilon \forall i \in \mathbb{N} \right\}$$

Con $\text{diam}(C)$ el diámetro del conjunto C con la norma usual de $\mathbb{R}^n$, y $V(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{s}{2})}$ generaliza el volumen de la bola unitaria s -dimensional para $s > 0$. Un recubrimiento $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de A tal que $\text{diam}(C_i) < \varepsilon \forall i \in \mathbb{N}$ se llama ε -recubrimiento de A .

- (i) Pruebe que $H^s(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon^s(A)$ existe en $\overline{\mathbb{R}}_+$ para $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y define una medida exterior. Ella es conocida como la **Medida de Hausdorff s -dimensional**.
- (ii) Pruebe que la σ -álgebra de conjuntos H^s -medibles contiene a los Borelianos de $\mathbb{R}^n$.
- (iii) Pruebe que H^0 es la medida cuentapuntos en $\mathbb{R}^n$.
- (iv) Pruebe que si $n = 1$, H^1 coincide con la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ (de hecho se verá más adelante que H^n coincide con la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$).
- (v) Pruebe que H^1 no es σ -finita en $\mathbb{R}^2$.
Hint: demuestre que $H^1([0, 1] \times \{0\}) = 1$
- (vi) Pruebe que si $H^s(A) < \infty$, entonces $H^t(A) = 0 \forall t > s$
- (vii) Pruebe que si $H^s(A) > 0$, entonces $H^t(A) = \infty \forall t < s$

Las propiedades anteriores motivan la definición de **Dimensión de Hausdorff** de un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$:

$$\dim_H(A) := \inf \{s \in [0, \infty) : H^s(A) = 0\}$$

- (viii) Calcule la dimensión de Hausdorff de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ numerable.
- (ix) Calcule la dimensión y medida de Hausdorff del conjunto de Cantor usual en $\mathbb{R}$.

P2. Medidas Exteriores Métricas

Dado un espacio métrico (X, d) , una medida exterior $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ se dice **Medida Exterior Métrica** si

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X), d(A, B) > 0 \implies \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

- (i) Sea U un abierto en X , μ^* una medida exterior métrica en X y $E \subseteq U$, y considere la sucesión de conjuntos

$$E_n := \left\{ x \in X : d(x, U^c) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap E$$

Pruebe que $\mu^*(E_n) \nearrow \mu^*(E)$.

- (ii) Demuestre que una medida exterior μ^* es medida exterior métrica si y sólo si todo abierto es μ^* -medible (use la parte (i) para probar la implicancia derecha).

Concluya que la medida de Hausdorff de la pregunta anterior es una medida exterior métrica.