

AUXILIAR 1: TEORÍA DE LA MEDIDA

PROFESOR: JAIME SAN MARTÍN

AUXILIARES: MAURO ESCOBAR - FELIPE SUBIABRE

23 DE AGOSTO DE 2010

P1. (i) Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{F} = \{ \{x\} : x \in X \}$. Pruebe que

$$\sigma(\mathcal{F}) = \{ A \in \mathcal{P}(X) : |A| \leq |\mathbb{N}| \vee |A^c| \leq |\mathbb{N}| \}.$$

(ii) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partición numerable de X . Si $\mathcal{G} = \{ A_n : n \in \mathbb{N} \}$, pruebe que

$$\sigma(\mathcal{G}) = \{ \bigcup_{n \in \mathcal{K}} A_n : \mathcal{K} \subseteq \mathbb{N} \}.$$

Como consecuencia, caracterice $\sigma(\{A\})$ para $A \subset X$.

P2. El propósito de esta pregunta es probar el π, λ -**Teorema**:

Si $\mathcal{P}$ es un π -sistema e $\mathcal{I}$ es un λ -sistema tales que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}$, entonces

$$\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{I}.$$

Para esto, necesitamos algunas definiciones previas:

· $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice que es un π -**sistema** si

$$A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}.$$

· $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice que es un λ -**sistema** si

- $X \in \mathcal{I}$.

- Si $A \in \mathcal{I}$, entonces $A^c \in \mathcal{I}$.

- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ son disjuntos, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{I}$.

(i) $\mathcal{I}$ es λ -sistema y π -sistema si y solamente si $\mathcal{I}$ es σ -álgebra.

(ii) Si $\mathcal{P}$ es π -sistema, entonces $\sigma(\mathcal{P}) = \lambda(\mathcal{P})$.

(iii) Concluya el Teorema.

P3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{F}$.

$$\mathcal{C}_1 \perp \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2 \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Pruebe que si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son π -sistemas independientes, entonces $\sigma(\mathcal{C}_1) \perp \sigma(\mathcal{C}_2)$.