

MA37A Optimización. Semestre Otoño 2008

Profesor: Héctor Ramírez C. Auxiliares: Omar Larre, Oscar Peredo.

Control 3

P1. Resuelva el siguiente problema lineal entero usando el algoritmo de ramificación y acotamiento (RyA):

$$\text{mín } p = x + y + z \text{ sujeto a } x + y - 2z \leq 0, 3x + y - z \geq 3, x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}, z \in \{0, 1\} \quad (\text{PLE})$$

Cada problema lineal que aparezca como producto del algoritmo RyA debe resolverse usando SIMPLEX o resolución gráfica.

Indicación: La solución de la versión lineal *relajada* del problema (PLE) está dada por: $p = 9/5$; $x = 6/5$, $y = 0$, $z = 3/5$.

P2. La empresa automotriz DOCH, dedicada al ensamblaje automatizado de autos, desea mejorar su producción. Para ello, los ejecutivos de DOCH desean obtener una línea de producción que maximice la tasa de autos ensamblados por hora.

El proceso de ensamblaje se ha resumido en tres pasos: instalación del motor, instalación de los interiores (asientos, radio, etc.) y ruedas, e instalación de los parabrisas y ventanas.

Para cada uno de estos pasos hay distintas maquinas que ensamblan a distintas velocidades. La elección de una maquina en cada paso depende de la maquina elegida en un paso anterior. Estas relaciones se detallan a continuación:

- (i) Motor: Pueden usarse las maquinas M1 y M2, que instalan 9 y 5 motores por hora, respectivamente.
- (ii) Interiores y ruedas: Pueden usarse las maquinas M3, M4, M5, que instalan 3, 7 y 4 interiores por hora, respectivamente. Si al instalar el motor se usó M1, no se puede usar M5 para instalar los interiores, y si al instalar el motor se usó M2, no se puede usar M3.
- (iii) Parabrisas y ventanas: Pueden usarse las maquinas M6 y M7 que instalan 2 y 10 sets de parabrisas y ventas por hora, respectivamente. Si al instalar los interiores se usó M3, pueden usarse ambas maquinas M6 y M7 para instalar los parabrisas y ventanas, pero si se usó M4 o M5, sólo se puede usar M7.
- (a) (2ptos.) Modele este problema como un problema de flujo máximo. El grafo asociado a este problema debe reflejar las relaciones entre las maquinas y las capacidades de sus arcos corresponderán a la velocidad con que opera cada maquina.
- (b) (4ptos.) Resuelva el problema de flujo máximo obtenido en la parte (a) utilizando el algoritmo de Ford-Fulkerson. ¿Cuántos autos ensamblará DOCH por hora?

P3. (a) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\text{mín } (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 \text{ sujeto a } x_1 + x_2 \leq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (\text{PNL1})$$

- (i) (1pto.) Establezca las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para este problema. ¿Son estas condiciones necesarias y suficientes para determinar una solución del problema (PNL1)? Justifique.
- (ii) (1pto.) Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, entonces suponga que se sabe que la primera restricción es activa en el óptimo de (PNL1) y determine esta solución resolviendo las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.
- (b) Considere ahora el siguiente problema de optimización:

$$\text{mín } x_2 \text{ sujeto a } x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq x_1^3. \quad (\text{PNL2})$$

- (i) (1pto.) Determine gráficamente la solución del problema (PNL2). Demuestre, sin utilizar la resolución gráfica, la existencia de esta solución.
- (ii) (2ptos.) Establezca y resuelva las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para este problema. ¿Permiten estas condiciones resolver el problema (PNL2)?
- (iii) (1pto.) Denotemos por $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^\top$ la solución de (PNL2) obtenida en la parte (i). Calcule el cono tangente a las restricciones de (PNL2) en $\bar{x}$ y demuestre que $\bar{x}$ es efectivamente solución del problema (PNL2).

Tiempo: 2 horas 30 minutos.