MA37A Optimización. Semestre 2005-2
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Francisco Jara, Oscar Peredo.

Control 3

P1. (a) Se desean embarcar 40 mil toneladas de cobre desde los puertos de Antofagasta y San Antonio (20 mil toneladas desde cada puerto), con destino a las ciudades de Hong Kong, New York y Tokio. Estas ciudades demandan 15 mil, 15 mil y 10 mil toneladas del mineral, respectivamente.

Supongamos que las rutas entre los puertos y las ciudades destino son fijas y conocidas, y que los costos asociados a transportar mil toneladas (medidos en millones de pesos) son estimados en la siguiente tabla:

P $\diagdown$ D	Hong Kong	New York	Tokio
Antofagasta	10	11	20
San Antonio	6	9	8

Nuestro problema es cuanto cobre se transporta en cada ruta de manera de minimizar los costos asociados.

(i) Modele este problema como uno de transporte. Encuentre una primera "solución" para transportar el cobre (no necesariamente óptima) usando el proceso de *saturación a costo mínimo*.

(ii) A partir de lo anterior, encuentre la manera óptima de transportar el cobre.

(b) Usted en su rol de planificador de la X región requiere estudiar el problema de abastecimiento de la isla de Chiloé. Más precisamente, estudiaremos el abastecimiento de Castro y de Quellón (ciudades que demandan 150 y 50 toneladas, respectivamente) desde Puerto Montt. Para esto, existen dos alternativas complementarias de transporte: marítima y terrestre. Desde Puerto Montt se puede acceder a todos los puertos importantes de la isla: Ancud, Castro y Quellón. Mientras que en Ancud se pueden contratar camiones para llevar parte de la carga a Castro y a Quellón.

Debido a las dotaciones existentes de barcos y al díficil acceso a las rutas más lejanas, existen capacidades máximas de trasporte iguales a 200 toneladas entre Puerto Montt y Ancud, 100 toneladas entre Puerto Montt y Castro, y 50 toneladas entre Puerto Montt y Quellón.

Finalmente los costos (medidos en millones de pesos por tonelada enviada) se detallan a continuación:

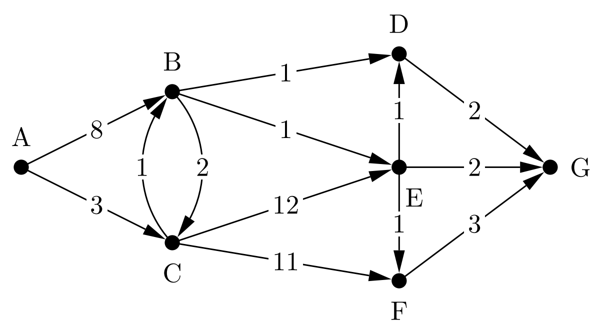
O$\diagdown$ D	Ancud	Castro	Quellón
Ancud (*vía terrestre*)	-	4	10
Puerto Montt (*vía marítima*)	6	1	30

(i) Modele el problema como uno de flujo factible a costo mínimo.
En estos momentos, el abastecimiento se desglosa como sigue: 50 tons. de Puerto Montt a Ancud, 100 tons. de Puerto Montt a Castro, 50 tons. de Ancud a Castro, y 50 tons. de Puerto Montt a Quellón. Demuestre que este flujo es una *solución básica factible* del problema.

(ii) A partir de lo anterior, encuentra el abastecimiento óptimo de la isla.

P2. (a) *Repartidor de Gas*

Un camión repartidor de gas desea minimizar la cantidad de gasolina que gasta en ir desde la central (A) hasta sus distintos clientes. Las posibles rutas que puede seguir y la cantidad de litros que gasta en cada tramo se detallan en el grafo de la figura.
Encuentre la ruta que minimiza el gasto de gasolina para cada cliente usando el algoritmo de Dijkstra.



(b) Resolver el siguiente problema usando *Branch and Bound*:

$$\begin{array}{llcrcr}
\max & 9x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{s.a} & 4x_1 & + & 9x_2 & \leq & 35 \\
 & x_1 & & & \leq & 6 \\
 & x_1 & - & 3x_2 & \geq & 1 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 19 \\
 & & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{N} \cup \{0\}.
\end{array}$$

P3. (a) Una pesquera maneja dos variables en su proceso de cosecha mensual, la cantidad de horas-hombre utilizada (x) y la superficie que se abarca (y), la cuales (debido a las unidades en que se miden) satisfacen que $x > 0$ e $y > 1$. Así, dados dos valores x e y para estas variables, la cosecha mensual (en kilos) está dada por:

$$\text{cosecha} = x^{\alpha}(\log y)^{\beta},$$

donde α y β son dos parámetros dados. Si el precio del kilo de pescado es $p = 1$, y los costos unitarios asociados a x e y son los valores estrictamente positivos c_x y c_y, respectivamente, entonces:

(i) Modele el problema de maximizar el beneficio de la pesquera como uno de programación "irrestricta" en $x > 0$ e $y > 1$, y encuentre las relaciones de la forma $h(y) = 0$ e $x = g(y)$ que satisfacen los puntos críticos del problema. ¿Puede concluir que estos son efectivamente máximos?

(ii) Desde ahora sabemos que los parámetros satisfacen $\alpha \in [0, 1[$ y $\beta \geq 0$, y reducimos nuestra estrategia al conjunto

$$C := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0,\ y > 1,\ \log y > \frac{\beta}{1-\alpha} - 1\right\}.$$

Demuestre que si los puntos críticos de la parte (i) están en C, entonces estos son máximos (globales) del problema.

Indicación: Estudie la convexidad del negativo de la función de beneficios.

(b) (i) Sean $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función *estrictamente convexa*, y $x^* \in \mathbb{R}^n$ un mínimo de φ. Demuestre que x^* es el único mínimo de φ.

(ii) Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa con derivada continua, $\lambda > 0$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Definamos la función

$$\varphi_\lambda(x) := f(x) + \frac{\lambda}{2}\|x - \bar{x}\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demuestre que existe un único mínimo global de φ_λ.

Indicación: Para la existencia del mínimo local debe utilizar la siguiente propiedad:

(P) Una función φ continua y *coerciva* (i.e. $\lim_{\|x\|\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$) siempre tiene un mínimo.

Punto extra: Demostrar la propiedad (P).

Tiempo: 3 horas.
Sin consultas.