# MA3701 Optimización: Análisis Post-optimal

Héctor Ramírez C.

4 de octubre de 2010

Consideremos un problema lineal en su forma estándar

$$\min c^t x \,;\, Ax = b, x \geq 0$$

Una vez resuelto este problema, deseamos saber que ocurre con su solución si algunos parámetros del problema cambian.

En todos los casos consideraremos el siguiente tableau óptimo ($\bar{c}_N^t \geq 0$ y $B^{-1}b \geq 0$):

| | | |
|---|---|---|
| $0$ | $\bar{c}_N^t$ | $-\bar{z}$ |
| $I$ | $B^{-1}N$ | $B^{-1}b$ |

## 1. Variación en coeficientes de función objetivo: $c$

Si $c$ cambia a $\tilde{c}$, se debe recalcular $\bar{c}_N^t$:

$$\bar{\tilde{c}}_N^t \;=\; \tilde{c}_N^t - \tilde{c}_B^t B^{-1} N$$

- Si $\bar{\tilde{c}}_N^t \geq 0$: La solución óptima sigue siendo la misma. La función objetivo toma el valor $\tilde{c}_B^t B^{-1} b$.
- Si $\bar{\tilde{c}}_N^t$ tiene una componente estrictamente negativa: Iterar con Simplex primal.

## 2. Variación en lado derecho: $b$

Si $b$ cambia a $\tilde{b}$, se debe recalcular $B^{-1}b$.

- Si $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$: La base óptima no cambia. La solución es ahora $\tilde{x} = [B^{-1}\tilde{b}|0]$ y función objetivo toma el valor $c_B^t B^{-1}\tilde{b}$.
- Si $B^{-1}\tilde{b}$ tiene alguna componente estrictamente negativa: Iterar con Simplex dual.

## 3. Introducción de nueva variable

Si se introduce una nueva variable $x_{n+1}$, con coeficiente $c_{n+1}$ y columna $A_{\cdot n+1}$, esta variable se considera no-básica y su costo reducido viene dado por:

$$\bar{c}_{n+1} \;=\; c_{n+1} - c_B^t B^{-1} A_{\cdot n+1}$$

Así, el nuevo tableau será:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0$ | $\bar{c}_N^t$ | $\bar{c}_{n+1}$ | $-\bar{z}$ |
| $I$ | $B^{-1}N$ | $B^{-1}A_{\cdot n+1}$ | $B^{-1}b$ |

- Si $\bar{c}_{n+1} < 0$:

- Si $B^{-1}A_{\cdot n+1} \leq 0$: Se produce no-acotamiento.
- Si $B^{-1}A_{\cdot n+1}$ tiene alguna componente estrictamente positiva: Iterar con Simplex primal.

- Si $\overline{c}_{n+1} \geq 0$: La solución sigue siendo óptima con $x_{n+1} = 0$.

# 4. Introducción de nueva restricción

Se agrega la restricción $d^t x \leq d_0$ (o equivalentemente $d^t x + x_{n+1} = d_0$). El problema queda de la forma:

$$\min\,(c^t, 0) \cdot (x, x_{n+1})\,;\ \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix}$$

Se agrega $x_{n+1}$ a la base, por lo que la matriz $B$ y su inversa se calculan como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^t & 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^t B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que los costos reducidos y la función objetivo no cambian. Sin embargo, $\tilde{B}^{-1}b$ y $\tilde{B}^{-1}N$ si cambian, obteniendo:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}N &= \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} N \\ d_N^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}N \\ d_N^t - d_B^t B^{-1} N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}b &= \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ d_0 - d_B^t B^{-1} b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así, el nuevo tableau será:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0$ | $\overline{c}_N^t$ | $0$ | $-\overline{z}$ |
| $I$ | $B^{-1}N$ | $0$ | $B^{-1}b$ |
| $0$ | $d_N^t - d_B^t B^{-1}N$ | $1$ | $d_0 - d_B^t B^{-1}b$ |

- Si $d_0 - d_B^t B^{-1} b < 0$:

  - Si $d_N^t - d_B^t B^{-1} N \geq 0$: Se produce no-acotamiento.
  - Si $d_N^t - d_B^t B^{-1} N$ tiene alguna componente estrictamente negativa: Iterar con Simplex dual.

- Si $d_0 - d_B^t B^{-1} b \geq 0$: La solución sigue siendo óptima. En la formulación estándar la nueva variable de holgura toma el valor $x_{n+1} = d_0$.