MA3701 Optimización
Dualidad

Héctor Ramírez Cabrera

24 de septiembre de 2010

1. Problema Dual

Un problema lineal (P) en su forma estándar (llamado primal) tiene como problema dual a (D), como se muestra a continuación:

$$(P): \begin{array}{lccc} \textbf{min} & c^t x & & \\ \textbf{s.a} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad (D): \begin{array}{lccc} \textbf{max} & b^t y & & \\ \textbf{s.a} & A^t y & \leq & c \\ & y & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Proposición. *El dual de (D) es el primal (P).*

Propuesto. Muestre que para la formulaciones canónicas (P') se tiene los problemas duales dados por (D'):

$$(P'): \begin{array}{lccc} \textbf{min} & c^t x & & \\ \textbf{s.a} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad (D'): \begin{array}{lccc} \textbf{max} & b^t y & & \\ \textbf{s.a} & A^t y & \leq & c \\ & y & \leq & 0 \end{array}$$

$$\text{(P'):} \begin{array}{lccc} \textbf{min} & c^t x & & \\ \textbf{s.a} & Ax & \geq & b \end{array} \qquad \text{(D'):} \begin{array}{lccc} \textbf{max} & b^t y & & \\ \textbf{s.a} & A^t y & = & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 1. *Calcule el dual del siguiente problema:*

$$\begin{array}{lcccccc} \boldsymbol{min} & 4x_1 & +6x_2 & +2x_3 & & \\ \boldsymbol{s.a} & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \geq & 4 \\ & 4x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 5 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & & x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Solución 1. *El dual es*

$$\begin{array}{lccccc} \boldsymbol{max} & 4y_1 & +5y_2 & & \\ \boldsymbol{s.a} & 2y_1 & +4y_2 & \leq & 4 \\ & 3y_1 & +y_2 & \leq & 6 \\ & y_1 & -y_2 & = & 2 \\ & & y_1 & \geq & 0 \\ & & y_2 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

2. Dualidad Débil y Fuerte

Teorema (Dualidad Débil)**.** *Sea (P) un problema primal de minimización y (D) su dual, que resulta ser un problema de maximización, y consideremos x e y, puntos factibles de (P) y (D), respectivamente. Entonces $c^t x \geq b^t y$. En consecuencia, la función objetivo del problema dual acota superiormente a la del primal.*

Corolario. *Sean x e y puntos factibles para (P) y (D) respectivamente. Si $c^t x = b^t y$, entonces son óptimos respectivos.*

Teorema (Dualidad Fuerte)**.** *Sea (P) un problema primal de minimización y (D) su dual, que resulta ser un problema de maximización. Entonces:*

1. *Si* $\mathrm{val}(P)$ *es un valor finito entonces* $\mathrm{val}(D)$ *también lo es y* $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(D)$.
2. *Si* $\mathrm{val}(D)$ *es un valor finito entonces* $\mathrm{val}(P)$ *también lo es y* $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(D)$.
3. *Si (P) es no acotado entonces (D) es infactible.*
4. *Si (D) es no acotado entonces (P) es infactible.*

Teorema (Holgura Complementaria)**.** *Considere (P) y (D) como se muestran a continuacion:*

$$(P): \begin{array}{lccc} \textbf{\textit{min}} & c^t x & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad (D): \begin{array}{lccc} \textbf{\textit{max}} & b^t y & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & A^t y & \leq & c \end{array}$$

Se tiene que x^* e y^* son óptimos de (P) y (D), respectivamente, si y sólo si x^* es factible para (P), y^* es factible para (D) y $x_i^* s_i^* = 0$, $i = 1, ..., n$, donde $s^* = c - A^t y^*$ es el vector de holgura de (D).

Problema 2. *Resuelva el siguiente problema usando los resultados de dualidad vistos anteriormente:*

$$(P) \qquad \begin{array}{lccccc} \textbf{\textit{min}} & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 10 \\ & 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 20 \\ & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Solución 2. *El dual viene dado por*

$$(D) \qquad \begin{array}{lcccc} \textbf{\textit{max}} & 10y_1 & +20y_2 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & 2y_1 & +5y_2 & \leq & 4 \\ & 3y_1 & +2y_2 & \leq & 1 \\ & y_1 & +y_2 & \leq & 5 \end{array}$$

Este se resuelve gráficamente, obteniendo $y_1^* = -3/11$ e $y_2^* = 10/11$, y por lo tanto $\mathrm{val}(D) = 170/11$. Así, la solución x^* de (P), además de las igualdades en la factibilidad se debe satisfacer

$$4x_1^* + x_2^* + 5x_3^* = 170/11.$$

Estas tres ecuaciones lineales nos entregan un único punto $x_1^* = 40/11$, $x_2^* = 10/11$ y $x_3^* = 0$. Notemos también que la condición $x_3^* = 0$ se obtiene directamente de la holgura complementaria.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">(P) factible</td><td rowspan="2">(P) infactible</td></tr>
<tr><td>(P) tiene solución</td><td>(P) no acotado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(D) factible</td><td>(D) tiene solución</td><td>dualidad fuerte
val(P)=val(D) finito</td><td>imposible</td><td>imposible</td></tr>
<tr><td>(D) no acotado</td><td>imposible</td><td>imposible</td><td>dualidad fuerte
val(P)=val(D)=infinito</td></tr>
<tr><td colspan="2">(D) infactible</td><td>imposible</td><td>dualidad fuerte
val(P)=val(D)=-infinito</td><td>patológico
val(P)=infinito
val(D)=-infinito</td></tr>
</table>