

MA3701 Optimización. Semestre Primavera 2010

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Francisco Unda, Mauro Escobar.

Auxiliar #3

P1. Sea C un convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $x_0 \in C$. Definiremos los siguientes conjuntos:

El conjunto de *direcciones tangentes a C en x_0* como $T_C(x_0) = \mathbb{R}_+(C - x_0)$.

El *sub-espacio facial de x_0 relativo a C* , $L_C(x_0)$, como el sub-espacio vectorial más grande contenido en $T_C(x_0)$.

La *face de x_0 en C* como $F_C(x_0) = [x_0 + L_C(x_0)] \cap C$.

(a) Muestre que si x_0 está en el interior de C entonces $T_C(x_0) = \mathbb{R}^n$ y $F_C(x_0) = C$. Además, pruebe que x_0 es óptimo del problema (P) $\min_{x \in C} c^T x$ si y sólo si $c^T d \geq 0$ para todo $d \in T_C(x_0)$.

(b) Demuestre que

$$L_C(x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n : \exists \epsilon > 0, \forall |\lambda| < \epsilon, x_0 + \lambda d \in C\}.$$

Deduzca que a menos que sea igual a $\{x_0\}$, $F_C(x_0)$ es la unión de todas las combinaciones convexas $[a, b]$, contenidas en C , tales que $x_0 \in (a, b)$.

(c) Demuestre que x_0 es punto extremo de C si y sólo si $L_C(x_0) = \{0\}$, o equivalentemente $F_C(x_0) = \{x_0\}$.

(d) Sea el poliedro $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, y consideremos $x_0 \in C$. Demuestre que

$$F_C(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = b_i, \forall i \in I(x_0)\} \cap C,$$

donde a_i^T es el i -ésimo vector fila de A e $I(x_0) = \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i^T x_0 = b_i\}$. Concluya que x_0 es punto extremo del poliedro C ssi $a_i^T x_0 = b_i$ para al menos n vectores fila a_i^T que sean linealmente independientes.

Indicación: Puede serle útil mostrar que $x_0 + \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = 0, \forall i \in I(x_0)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = b_i, \forall i \in I(x_0)\}$.

P2 Sea $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$.

(a) Demuestre que $\mathcal{P}$ tiene al menos una dirección extrema si y sólo si $\mathcal{P}$ es no acotado, es decir, $\forall M > 0, \exists x \in \mathcal{P}$ tal que $\|x\| \geq M$.

(b) Suponga ahora que $\mathcal{P}$ es compacto, es decir, cerrado y acotado, con $A \in M(\mathbb{R})_{m \times n}$ de rango $m < n$. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

1) Cada elemento de $\mathcal{P}$ tiene al menos m componentes mayores que cero.

2) Cada punto extremo de $\mathcal{P}$ tiene exactamente m componentes mayores que cero.

Indicación: Use la caracterización de un poliedro en función de sus puntos extremos y sus direcciones extremas.

P3. Sean A matriz $p \times n$ y B matriz $q \times n$. Demuestre que uno y sólo uno de los siguientes tienen solución

(a) $Ax < 0 \quad Bx = 0$

(b) $A^T u + B^T v = 0 \quad u \neq 0, u \geq 0$

P4. Determine todos los puntos extremos y direcciones extremas del poliedro

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$