MA3701 Optimización:
Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker
e Interpretación Económica de la Dualidad

Héctor Ramírez C.

Jueves 25 de Noviembre de 2010

1. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Consideremos el siguiente problema no lineal:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\,;\, x\in\Theta,\, g_i(x)\le 0,\, i=1,...,m,\, h_j(x)=0,\, j=1,...,p \tag{PNL}$$

donde Θ es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ contenido en la intersección de los dominios de f, g_i y h_j. Por simplicidad, denotamos por C al conjunto factible de (PNL) (i.e. $C=\mathcal{F}(\text{PNL})$) y las funciones $g=(g_i):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ y $h=(h_j):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$.

Teorema (Condición necesaria de primer orden, condiciones de Karush-Kuhn-Tucker)**.** *Sea x^* un mínimo local de (PNL) tal que f y g son diferenciables en x^* y h es continuamente diferenciable en una vecindad de x^*. Supongamos además la condición:*

$$\{\nabla g_i(x^*)\}_{i\in I_0(x^*)}\cup\{\nabla h_j(x^*)\}_{j=1,...,p} \quad \textit{son linealmente independientes,} \tag{ILGA}$$

donde $I_0(x^*):=\{i\,:\,g_i(x^*)=0\}$ es el conjunto de índices activos de g en x^*. Entonces existen únicos multiplicadores $\mu=(\mu_i)\in\mathbb{R}^m$ y $\lambda=(\lambda_j)\in\mathbb{R}^m$ tales que:

$$\left.\begin{array}{r}\nabla_x L(x^*,\mu,\lambda)=\nabla f(x^*)+\displaystyle\sum_{i=1}^m\mu_i\nabla g_i(x^*)+\sum_{j=1}^p\lambda_j\nabla h_j(x^*)=0\\ \mu_i\ge 0,\;\; \mu_i g_i(x^*)=0,\quad \forall i=1,...,m,\end{array}\right\} \tag{KKT}$$

donde $L(x,\mu,\lambda):=f(x)+\mu^\top g(x)+\lambda^\top h(x)$ es llamado el **Lagrangeano** *del problema (PNL).*

Dado $x^*\in C$, los multiplicadores μ y λ que satisfacen (KKT) se suelen llamar **multiplicadores de Lagrange o multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker** asociados a x^*.

Teorema (Caso convexo)**.** *Si C es un conjunto convexo (es decir, si Θ es convexo, g_i son funciones convexas y h es una función lineal afín de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$), entonces la existencia de multiplicadores de Lagrange en el teorema anterior esta garantizada incluso si reemplazamos (ILGA) por la condición más débil llamada de* **Slater***:*

$$\textit{Existe } \bar{x}\in\Theta \textit{ tal que } g_i(\bar{x})<0,\,\forall i=1,...,m,\quad h_j(\bar{x})=0,\,\forall j=1,...,p. \tag{SLATER}$$

Sin embargo, los multiplicadores pueden no ser únicos.

Si además f es una función convexa, entonces la existencia de multiplicadores de KKT es también una condición suficiente para caracterizar la optimalidad de x^*. En este caso, el mínimo es global. Si f es estrictamente convexa, el mínimo es además único.

Solución. *Propuesto.*

2. Interpretación Económica de los Multiplicadores de Lagrange

Consideremos una perturbación del lado derecho de las restricciones problema (PNL) dada por dos vectores $u \in \mathbb{R}^m$ y $v \in \mathbb{R}^p$:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\,;\, x \in \Theta,\ g_i(x) \leq u,\ i = 1, ..., m,\ h_j(x) = v,\ j = 1, ..., p \qquad (\text{PNL}_{(u,v)})$$

Sea x^* un mínimo local de (PNL) y (μ, λ) su respectivo **único** multiplicador. En este contexto, aceptaremos (sin demostrarlo) la siguiente afirmación:

Afirmación. *El vector $-(\mu, \lambda)$ se interpretan como los* **costos marginales** *asociados a sus respectivas restricciones, es decir, si las perturbaciones u y v son suficientemente pequeñas, podemos estimar la variacion del valor óptimo del problema por:*

$$\text{val}(PNL_{(u,v)}) - \text{val}(PNL) \approx -\mu^\top u - \lambda^\top v.$$

3. Aplicación

Problema 1. *Se sabe que tres fondos mutuos A, B y C tienen retornos esperados del 10 %,10 % y 15 %. Se desea invertir en todos estos fondos, minimizando el riesgo asociado, de tal manera que el retorno esperado sea exactamente de un 12 %. El riesgo (medido en miles pesos) de invertir un porcentaje x de los recursos disponibles en el fondo A, y en el fondo B y z en el fondo C viene dado por $400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz$. Modele este problema usando programación no lineal y resuelvalo usando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Una vez resuelto el problema, estime el nuevo riesgo si ahora se impone un retorno del 12.5 %.*

Solución. *Las variables x, y, z denotan los porcentajes de los recursos que invierto en los fondos A, B y C, respectivamente. El problema se plantea de la forma:*

$$\begin{array}{ll} \min & 400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz \\ s.a & x + y + z = 1, \quad x, y, z > 0. \\ & x + y + 1{,}5z = 1{,}2 \ (\text{ó } 10x + 10y + 15z = 12) \end{array}$$

Notemos que de la factibilidad de las variables se obtiene que $z = 0{,}2/0{,}5 = 0{,}4$. Ahora, sin agregar las restricciones de positividad, el Lagrangeano viene dado por

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz + \lambda_1(1 - x - y - z) + \lambda_2(1{,}2 - x - y - 1{,}5z)$$

y, en consecuencia, las condiciones KKT se escriben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 800x + 200y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1600y + 200x + 400z - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 3200z + 400y - \lambda_1 - 1{,}5\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Al resolver el sistema anterior se obtiene la única solución:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}5 \\ y &= 0{,}1 \\ z &= 0{,}4 \\ \lambda_1 &= -1380 \\ \lambda_2 &= 1800 \end{aligned}$$

Luego, como $\nabla h_1 = (-1, -1, -1)^\top$ y $\nabla h_2 = (-1, -1, -1{,}5)^\top$ son l.i., entonces (ILGA) siempre se satisface y, por lo tanto, los valores encontrados son candidatos al óptimo, cuya función objetivo (riesgo) es 390 mil pesos.

¿Cómo podemos ahora asegurar que es efectivamente la solución del problema?. Primero, notemos que el teorema de Weiestrass nos asegura una solución si relajamos la positividad de las variables (es decir, consideramos $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$ en lugar de $x > 0$, $y > 0$ $z > 0$, respectivamente). Por otro lado, dado que

siempre se cumple que $z = 0,4$, si $x = 0$ necesariamente se tiene que $y = 0,6$ y viceversa. En estos casos, la función objetivo vale 640 y 400 mil pesos, respectivamente, ambos valores mayores que los encontrados para nuestro punto crítico. Por lo tanto concluimos que $x = 0{,}5$, $y = 0{,}1$, $z = 0{,}4$ es la solución de nuestro problema. Otra forma más directa es chequear que el problema es convexo (f es convexa y el conjunto fáctible es convexo), por lo que las condiciones de KKT son también suficientes para chequear optimalidad.

Finalmente, si se cambia el retorno esperado a un 12.5 % (i.e. se ha modificado el lado derecho de la igualdad $h_2 = 0$ en $v_2 = -0{,}05$), entonces utilizando la afirmación, el incremento en la función objetivo (riesgo) es $-\lambda_2 v_2 = -1800 * -0{,}05 = 90$ (mil pesos), obteniendo que el nuevo riesgo se estima en 480 mil pesos.$\square$

Problema 2. *¿Cambia la solución si ahora permitimos no invertir en alguno de los fondos? ¿Son los porcentajes antes mencionados mínimos locales del problema?*

Solución. *Propuesto.*

Problema 3. *La utilidad dada por una acción en la bolsa depende de un índice x de volatilidad, que puede ser positivo o negativo, y del precio y (≥ 0) que uno esta dispuesto a pagar por una garantía o seguro. Dicha utilidad viene dada por la función*

$$f(x, y) = x^3 - 3x - y.$$

(a) *Maximice la utilidad de la acción respetando la restricción de riesgo:*

$$x + y \leq 2.$$

Para esto debe *utilizar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker y las condiciones optimales de segundo orden.*

(b) *Suponga ahora que el índice de volatilidad es estrictamente positivo (i.e. $x > 0$). Si se está dispuesto a aceptar un riesgo máximo mayor, aumentándolo de 2 a 2,05. Estime directamente la nueva utilidad asociada a la acción.*

Solución. *Propuesto.*