MA3701 Optimización. Semestre Primavera 2010
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Francisco Unda, Mauro Escobar.

Auxiliar #8

P1. Considere el problema lineal:

$$\begin{array}{rccccl}
\textbf{minimizar} & 5x_1 & -3x_2 & & & \\
\textbf{s.a} & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & \leq & 4 \\
& x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 5 \\
& 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \geq & 1 \\
& & & x_i & \geq & 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\}
\end{array}$$

Dado el siguiente tableau óptimo:

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 10/3 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & -2/3 & 1
\end{array}$$

(i) Verifique que el tableau corresponde a un óptimo.

(ii) Escriba B, matriz de base (óptima), y B^{-1}.

(iii) Si cambia la función objetivo $5x_1 - 3x_2$ por $5x_1 - 3x_2 + 3x_3$, ¿cambia la solución óptima?

(iv) Si b cambia a $b' = (1, 4, 5)^T$ (en el problema original), ¿cambia la solución óptima?

(v) Si se introduce una nueva variable u (en el problema original), cuyo costo unitario es 6 y cuya columna correspondiente es $N_u = (-1, -3, 1)^T$, ¿cambia la solución óptima?.

(vi) Si se agrega (al problema original) la restricción $x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$, ¿cambia la solución óptima?.

Camino de Peso Mínimo

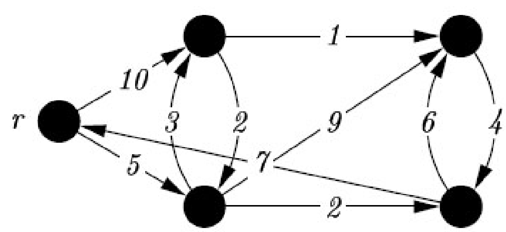
El problema del camino de peso mínimo recibe como entradas un grafo dirigido $G = (V, E)$ (con V el conjunto de vértices y $E \subseteq V \times V$ el conjunto de arcos), un nodo raíz $r \in V$ y una función de pesos $c : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. El objetivo es encontrar, para cada $v \in V$, un camino dirigido desde r hasta v de peso mínimo.

Para ello ocuparemos el algoritmo de **Dijkstra**, que guarda un arreglo p con el nodo predecesor en el camino óptimo, es decir, $p[v] = u$ significa que el arco $(u, v) \in E$ pertenece al camino de peso mínimo. Además guarda el peso total de llegar desde la raíz a un nodo v utilizando el camino óptimo en un arreglo y.

Algorithm 1 Dijkstra($G = (V, E), c, r$)

▷ INICIALIZACIÓN
for $v \in V$ **do**
    $y[v] = \infty$
    $p[v] = NULO$
end for
$y[r] = 0$
▷ ITERACIÓN
$S \leftarrow \{r\}$
$Q \leftarrow V$
while $Q \neq \{r\}$ **do**
    for v tal que $(s, v) \in (S \times Q - \{r\}) \cap E$ **do**
        $y[v] \leftarrow \text{mín}\{y[v], y[s] + c(s, v)\}$ ▷ Actualizar valores de y en los nodos de llegada partiendo de S
    end for
    Encontrar $u \in Q - \{r\}$ y $s \in S$ tal que $c(s, u)$ sea mínimo
    $p[u] = s$
    $S \leftarrow S \cup \{u\}$
    $Q \leftarrow Q \backslash \{u\}$
end while

P2. Encontrar los caminos de costo mínimo partiendo de la raíz en el siguiente grafo:



P3. Se desea contratar una empresa de camiones para transportar materiales desde un punto de una ciudad a otro. La ciudad se puede modelar como un grafo dirigido $G = (V, E)$, donde los nodos representan intersecciones de calles y los arcos las calles que las unen. La empresa está planeando las rutas desde un nodo r (origen) hasta un nodo t (destino).

(i) Es bastante costoso cuando se producen demoras en las rutas de los camiones. Para solucionar esto, la empresa ha calculado la probabilidad $p(e) \in [0, 1]$ de que un calle $e \in E$ tenga demasiada congestión vehicular. Entregue un algoritmo que encuentre una ruta que tenga una mínima probabilidad de tener un camino congestionado (en un tiempo fijo). Puede asumir que todas las calles son independientes, es decir, la probabilidad de que n calles $(e)_{i=1}^{n} \subset E$ estén congestionadas se representa $p(e_1, ..., e_n)$ y se cumple la igualdad $p(e_1, ..., e_n) = \prod_{i=1}^{n} p(e_i)$. Lo mismo sucede con la probabilidad de que la calle no tenga congestión $q(e) = 1 - p(e)$.

(ii) Suponga que cada calle $e \in E$ soporta un tonelaje máximo por vehículo $m(e) \in \mathbb{R}_+$. Encuentre el máximo tonelaje de un camión que puede transitar entre r y t.