

Introducción a la Teoría de Grafos

Conceptos Simples, Problemas Difíciles

Héctor Ramírez C.¹

¹Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

Curso MA3701: Optimización

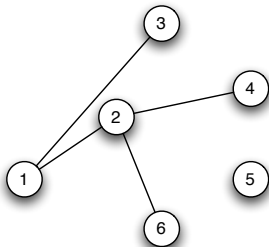
- 1 Grafos y conceptos básicos
- 2 Árboles
- 3 Grafos completos
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Grafos completos bipartitos

Definición

Un **grafo** $G = (V, E)$ está compuesto por un conjunto de nodos o vértices V y un conjunto de aristas $E \subseteq V_*^2 := V \times V \setminus \bigcup_{v \in V} \{(v, v)\}$. En esta primera definición no importa el **sentido** de las aristas.

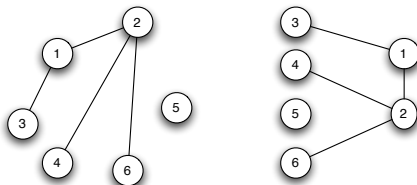
Ejemplo

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 6)\}$



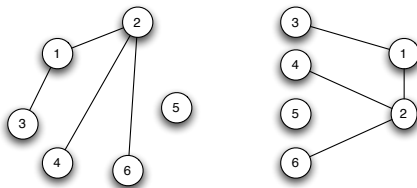
Representaciones gráficas de un grafo

Hay múltiples representaciones gráficas de un grafo.
Por ejemplo, el grafo del ejemplo puede ser representado así:

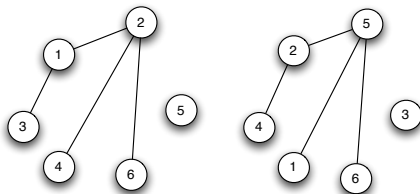


Representaciones gráficas de un grafo

Hay múltiples representaciones gráficas de un grafo.
Por ejemplo, el grafo del ejemplo puede ser representado así:



Los cuales son **isomorfos** a:



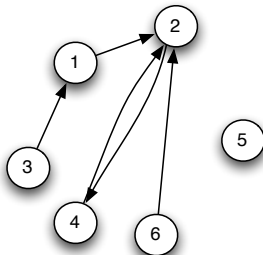
Grafos dirigidos

Definición

Un **grafo dirigido** (o **digrafo**) $G = (V, E)$ está compuesto por un conjunto de nodos o vértices V y un conjunto de aristas $E \subseteq V^2$ para las cuales **si importa** el sentido de las aristas.

Ejemplo

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $E = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 2), (6, 2)\}$



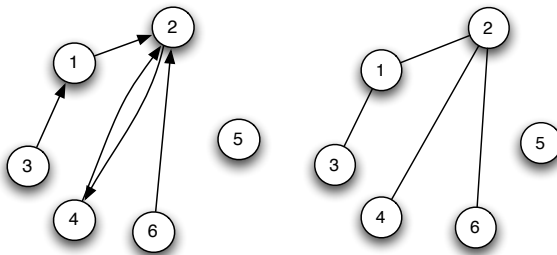
Versión no-dirigida de un grafo dirigido

Definición

La **versión no-dirigida** de un grafo dirigido $G = (V, E)$ corresponde al grado (no-dirigido) descrito por los mismos conjuntos V y E .

Ejemplo

La versión no-dirigida de $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $E = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 2), (6, 2)\}$ corresponde a:



Primeras definiciones (para grafos no-dirigidos)

- Tamaño de un grafo $G = (V, E)$: $|G| := |E|$
- u y v vértices adyacentes de $G = (V, E)$: $(u, v) \in E$
- $e \in E$ es incidente en $v \in V$: $\exists u \in V, e = (u, v) \in E$
- Grado de un vértice: $\delta(v) = |\{u : (u, v) \in E\}|$
- Grado máximo $\Delta(G)$ y grado mínimo $\delta(G)$ de un grafo.
- Subgrafo $G' = (V', E')$ de $G = (V, E)$
- Camino y Ciclo.
- Distancia $d(u, v)$, diámetro $diam(G)$.
- Grafo conexo: $\forall u, v \in V, u \neq v$, existe un camino de u a v .
- Matriz de incidencia.

Primeras definiciones (para grafos no-dirigidos)

- Tamaño de un grafo $G = (V, E)$: $|G| := |E|$
- u y v vértices adyacentes de $G = (V, E)$: $(u, v) \in E$
- $e \in E$ es incidente en $v \in V$: $\exists u \in V, e = (u, v) \in E$
- Grado de un vértice: $\delta(v) = |\{u : (u, v) \in E\}|$
- Grado máximo $\Delta(G)$ y grado mínimo $\delta(G)$ de un grafo.
- Subgrafo $G' = (V', E')$ de $G = (V, E)$
- Camino y Ciclo.
- Distancia $d(u, v)$, diámetro $diam(G)$.
- Grafo conexo: $\forall u, v \in V, u \neq v$, existe un camino de u a v .
- Matriz de incidencia.

Todas estas definiciones pueden reescribirse para grafos no-dirigidos.

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Proof. Notemos que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| \quad (1)$$

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Proof. Notemos que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| \quad (1)$$

Denotamos por $V' \subseteq V$ el subconjunto de los vértices de grado impar, y $V'' = V \setminus V'$ subconjunto de los vértices de grado par

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Proof. Notemos que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| \quad (1)$$

Denotamos por $V' \subseteq V$ el subconjunto de los vértices de grado impar, y $V'' = V \setminus V'$ subconjunto de los vértices de grado par

Obtenemos que $\sum_{v \in V'} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v \in V''} \delta(v)$ ■

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Proof. Notemos que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| \quad (1)$$

Denotamos por $V' \subseteq V$ el subconjunto de los vértices de grado impar, y $V'' = V \setminus V'$ subconjunto de los vértices de grado par

Obtenemos que $\sum_{v \in V'} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v \in V''} \delta(v)$ ■

La igualdad (1) se puede reescribir como:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) \equiv 0 \pmod{2},$$

conocida como *handshaking lemma* pues expresa que:

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Proof. Notemos que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| \quad (1)$$

Denotamos por $V' \subseteq V$ el subconjunto de los vértices de grado impar, y $V'' = V \setminus V'$ subconjunto de los vértices de grado par

Obtenemos que $\sum_{v \in V'} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v \in V''} \delta(v)$ ■

La igualdad (1) se puede reescribir como:

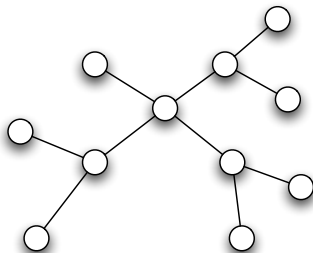
$$\sum_{v \in V} \delta(v) \equiv 0 \pmod{2},$$

conocida como *handshaking lemma* pues expresa que:

En cualquier fiesta el número de manos estrechadas es par

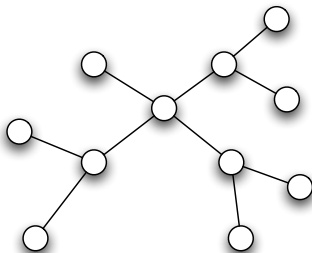
Definición

Un *árbol* es un grafo conexo que no contiene ciclos.



Definición

Un árbol es un grafo conexo que no contiene ciclos.



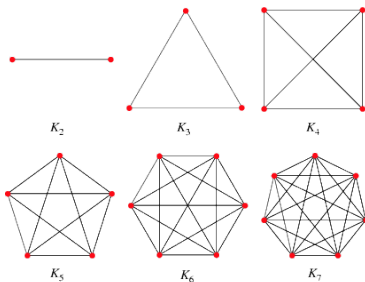
Proposición

$G = (V, E)$ es un árbol $\iff G$ es conexo y tiene $|V| - 1$ aristas

Grafos completos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ se dirá **completo** si $E = V_*^2$.



Ejercicio

$$G \text{ es completo} \iff |E| = \frac{(|V| - 1)|V|}{2}$$

Grafos bipartitos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ se dirá **bipartito** si $V = V_1 \cup V_2$ y $E \subseteq V_1 \times V_2$.

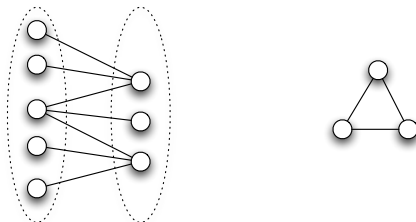


Figura: Ejemplo de un grafo bipartito y un no-bipartito

Grafos bipartitos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ se dirá **bipartito** si $V = V_1 \cup V_2$ y $E \subseteq V_1 \times V_2$.

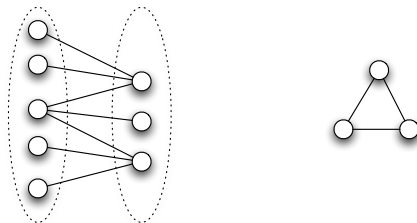


Figura: Ejemplo de un grafo bipartito y un no-bipartito

Proposición

G es bipartito $\iff$ no contiene ciclos impares

Grafos completos bipartitos

Definición

*Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es **completo bipartito** si este es bipartito y si $E = V_1 \times V_2$, donde $V = V_1 \cup V_2$.*

Grafos completos bipartitos

Definición

Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es completo bipartito si este es bipartito y si $E = V_1 \times V_2$, donde $V = V_1 \cup V_2$.

Si $|V_1| = n_1$ y $|V_2| = n_2$, denotaremos a este grafo por K_{n_1, n_2} .
Notemos que $|K_{n_1, n_2}| = n_1 n_2$.

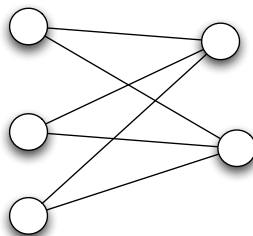


Figura: Grafo $K_{3,2}$