MA3701 Optimización: Algoritmo Simplex-Dual

Héctor Ramírez C.

1 de octubre de 2010

1. Algoritmo Simplex-Dual

Consideremos un problema lineal en su forma estándar:

$$\min\ c^t x \quad ; \quad Ax = b,\ x \geq 0$$

Sea una descomposición $A = [B|N]$, con B matriz de $n \times n$ invertible (base), donde no todas las componentes de $B^{-1}b$ son positivas (es decir, esta descomposición no esta asociada a un punto extremo de la forma $\bar{x} = [\bar{x}_B|\bar{x}_N] = [B^{-1}b|0]$), pero que si se satisface que el vector de costos reducidos no básicos ($\bar{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1}N$, con $c = [c_B|c_N]$) tiene sus componentes positivas. Por lo tanto $\bar{y} = B^{-t}c_B$ es un punto extremo del dual.

En este caso, podemos utilizar el **algoritmo Simplex-Dual** que se describe a continuación:

Algorithm 1 Simplex-Dual

Llevar el problema a la forma (tableau):

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{c}_N^t & -C_B^t B^{-1}b \\ \hline I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array}$$

con $\bar{c}_N^t \geq 0$. Como es usual, por comodidad este tableau se denotará por:

$$\begin{array}{c|c} \bar{c}^t & -\bar{z} \\ \hline \bar{A} & \bar{b} \end{array}$$

iteración

    si $B^{-1}b \geq 0$

        El **óptimo** es $x = [B^{-1}b|0]$

        parar iteración

    si $\exists (B^{-1}b)_r < 0$ y la fila correspondiente tiene solamente números positivos o ceros

        El problema dual es **no acotado**, o el problema primal es **infactible**.

        parar iteración

    si $\exists (B^{-1}b)_r < 0$ y la fila correspondiente tiene algún número menor que cero

        Sobre la fila r, escoger la columna s tal que:

$$\frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{r,s}} = \max_{\bar{a}_{r,j} < 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{r,j}} \right\}$$

        Pivotear en (r, s).

fin iteración

Problema 1. *Resuelva el siguiente problema lineal:*

$$\begin{array}{rrrrcl}
\textbf{\textit{minimizar}} & 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & & \\
\textbf{\textit{s.a}} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \geq & 3 \\
 & 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & \geq & 4 \\
 & & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$

Solución 1. *Como se pide minimizar, no es necesario hacer el cambio maximizar* $c^t x \Leftrightarrow -$*minimizar* $-c^t x$. *Al escribir el problema en forma estándar (agregando las variables de holgura* x_4, x_5*) se llega al siguiente tableau:*

$$\begin{array}{ccccc|c}
2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -3 \\
-2 & 1 & -3 & 0 & 1 & -4
\end{array}$$

El tableau se encuentra en la forma de la línea 1 donde los costos reducidos son positivos.

Comencemos a iterar:

- *Iteración 1:*
  - *Se satisface condición de línea 11, para la fila 2 (escogimos el elemento más negativo).*
  - $\min\limits_{\bar{a}_{2,j}>0} \left\{ \dfrac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{2,j}} \right\} = \dfrac{\bar{c}_1}{\bar{a}_{2,1}}$.
    Se pivotea en $(2,1)$.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{ccccc|c}
0 & 4 & 1 & 0 & 1 & -4 \\
\hline
0 & -5/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & -1 \\
1 & -1/2 & 3/2 & 0 & -1/2 & 2
\end{array}$$

- *Iteración 2:*
  - *Se satisface condición de línea 11, para la fila 1.*
  - $\min\limits_{\bar{a}_{2,j}>0} \left\{ \dfrac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{2,j}} \right\} = \dfrac{\bar{c}_2}{\bar{a}_{1,2}}$.
    Se pivotea en $(1,2)$.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 9/5 & 8/5 & 1/5 & -28/5 \\
\hline
0 & 1 & -1/5 & -2/5 & 1/5 & 2/5 \\
1 & 0 & 7/5 & -1/5 & -2/5 & 11/5
\end{array}$$

- *Iteración 3:*
  - *Se satisface condición de línea 3. El valor óptimo de la función objetivo es* $28/5$ *y el vector solución es:*

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 11/5 \\
x_2 & = & 2/5 \\
x_3 & = & 0 \\
x_4 & = & 0 \\
x_5 & = & 0
\end{array}$$

  - *Parar iteración*