

MA3701 Optimización. Semestre Primavera 2010

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Francisco Unda, Mauro Escobar.

Auxiliar #6

P1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c, p, q \in \mathbb{R}^n$, tal que $p \leq q$. Encuentre el dual de

$$\min c^T x, \quad x \in \mathcal{P} := \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, p \leq x \leq q \}.$$

Pruebe que el dual siempre posee un punto factible.

P2. Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{llll} \text{mín} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n & & \\ \text{s.a.} & x_1 & \geq & 1 \\ & x_1 + x_2 & \geq & 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 3 \\ & & & \vdots \\ & x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n & \geq & n \\ & x_i & \geq & 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{array} \quad (\mathcal{P})$$

(a) Determine el problema dual $(\mathcal{D})$.

(b) Verifique que se tiene la propiedad de *dualidad fuerte*, i.e. $\text{val}(\mathcal{P}) = \text{val}(\mathcal{D})$.

(c) Mostrar que para todo y vector factible de $(\mathcal{D})$, se tiene:

$$y_k + y_{k+1} + \dots + y_n < k, \quad \forall k \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

(d) Siendo $\bar{x}$ el óptimo de $(\mathcal{P})$, deduzca del teorema de complementaridad, los valores $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$.

(e) Resuelva el problema primal $(\mathcal{P})$, es decir, encuentre $\bar{x}$.

(f) Encuentre una solución óptima del dual.

P3. Una destilería produce whisky que envasa en botellas de 1 y 2 litros, que proporcionan un beneficio unitario de \$2 y \$3, respectivamente. La destilería puede trabajar hasta 70 horas semanales a un ritmo de 100 botellas por hora. La materia prima disponible permite fabricar 10.000 litros semanales, mientras que las demandas son de 6.000 botellas de 1 litro y 4.000 botellas de 2 litros. Planifique la producción y estime el incremento del beneficio por hora adicional de funcionamiento y por cada botella adicional producida por hora. Estime ahora, cuanto aumenta la ganancia si la demanda de botellas de 1 litro aumenta en 1 %.

P4. Resuelva el problema

$$\begin{array}{llllll} \text{minimizar} & 4x_1 & +15x_2 & +12x_3 & +2x_4 & \\ \text{s.a} & & 2x_2 & +3x_3 & +x_4 & \geq 1 \\ & x_1 & +3x_2 & +x_3 & -x_4 & \geq 1 \\ & & & & x_i & \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, 4\} \end{array}$$

Estime el valor del problema resultante de disminuir un 5 % el término independiente de la segunda restricción.