

MA3701 Optimización. Semestre Primavera 2010

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Francisco Unda, Mauro Escobar.

Auxiliar #4

P1. Resolver el siguiente problema usando el método SIMPLEX:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{minimizar} & -10x_1 & +57x_2 & +9x_3 & +24x_4 & & \\
 \text{s.a} & \frac{1}{2}x_1 & -\frac{11}{2}x_2 & -\frac{5}{2}x_3 & +9x_4 & \leq & 0 \\
 & \frac{1}{2}x_1 & -\frac{3}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +x_4 & \leq & 0 \\
 & x_1 & & & & \leq & 1 \\
 & & & & x_i & \geq & 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, 4\}
 \end{array}$$

P2. Resolver el siguiente problema usando el método SIMPLEX:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{maximizar} & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & \\
 \text{s.a} & 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \leq & 3 \\
 & -x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 5 \\
 & & & x_i & \geq & 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}
 \end{array}$$

P3. Una mueblería fabrica escritorios, mesas y sillas. La fabricación requiere de materia prima y de mano de obra. La mano de obra se clasifica en dos tipos: carpintería y terminaciones. La cantidad de recurso requerido por cada producto se muestra en la siguiente tabla:

RECURSO	Escritorio	Mesa	Silla
Materiales (pulgadas)	8	6	1
Terminaciones (horas)	4	2	1.5
Carpintería (horas)	2	1.5	0.5

Actualmente, se dispone de 48 pulgadas de madera, 20 horas para las terminaciones y 8 horas para la carpintería. Cada escritorio se vende a \$60, cada mesa a \$30 y cada silla a \$20. La empresa piensa que la demanda por escritorios y sillas es ilimitada, pero cree que se venderán a lo más 5 mesas. Debido a que los recursos ya han sido adquiridos, la empresa desea maximizar su beneficio.

P4. Resolver el siguiente problema usando el método SIMPLEX:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{minimizar} & \frac{x_1+1}{x_2+2} & & & & & \\
 \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

Hint: Considere el cambio de variables: $u = \frac{1}{x_2+2}$, $y_1 = \frac{x_1}{x_2+2}$ e $y_2 = \frac{x_2}{x_2+2}$.

Algorithm 1 Simplex Fase II

1: Escribir el problema en forma estándar (introduciendo variables de holgura si es necesario):

$$\min c^t x \quad \text{s.a } Ax = b, x \geq 0$$

▷ A matriz de $m \times n$

2: $A = [B|N]$, con B matriz de $m \times m$ invertible (base)

3: $c = [c_B|c_N]$, $x = [x_B|x_N]$

4: Considerar nuevo problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & (c_N^t - c_B^t B^{-1} N)x_N + c_B^t B^{-1} b \\ \text{s.a} \quad & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_N \geq 0 \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

5: Vector de costos reducidos: $\bar{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N$

6: Un punto extremo del poliedro será $x = [x_B|x_N] = [B^{-1}b|0]$

7: El problema se puede ver de la forma (tableau):

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{c}_N^t & -c_B^t B^{-1} b \\ \hline I & B^{-1} N & B^{-1} b \end{array}$$

8: **while** true **do**

9: **if** $\bar{c}_N^t \geq 0$ **then**

10: El **óptimo** es $x = [B^{-1}b|0]$

11: **parar iteración**

12: **end if**

13: **if** $\exists (\bar{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene solamente números negativos o ceros **then**

14: El problema es **no acotado**

15: **parar iteración**

16: **end if**

17: **if** $\exists (\bar{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene algún número mayor que cero **then**

18: Si x_s es la variable de la columna respectiva, se le hace entrar a la base, sacando x_r , con r (en el contexto de la base) tal que:

$$\frac{b_r}{a_{r,s}} = \min_{a_{i,s} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{i,s}} \right\}$$

19: Pivotear en (r, s) para sacar x_r e ingresar x_s

20: **end if**

21: **end while**

Para no caer en ciclos existe la **Regla de Bland**:

- (1) **Elección de la columna de pivote.** Se elige la columna con el sub-índice mayor entre aquellas columnas con elementos negativos en la fila de costos, en lugar de elegir la columna con el elemento negativo de mayor tamaño.
- (2) **Elección de la fila pivote.** Si existen dos o más filas donde se alcance el mínimo de los cocientes entre los elementos del lado derecho y los elementos positivos de la columna elegida en (1), se elige aquella fila con sub-índice mayor en lugar de elegirlo arbitrariamente.