MA37A Optimización: Simplex Fase I

Profesor: Héctor Ramírez

6 de Septiembre de 2010

Para el problema lineal escrito en su forma estándar:

$$\min c^t x \ ; \ Ax = b, \ x \geq 0, \tag{PL}$$

donde A es una matriz sobreyectiva de m filas y n columnas, $c \in I\!R^n$ y $b \in I\!R^m$, planteamos el siguiente problema auxiliar (introduciendo variables artificiales $x_a^t = (x_{a_1}, ..., x_{a_m})$):

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{a_i} \ ; \ Ax + x_a = b, \qquad x, x_a \geq 0. \tag{PL$_{aux}$}$$

Notemos que el problema (PL) es factible ssi el valor óptimo del problema auxiliar (PL$_{aux}$) es 0, obteniendo en este caso que $x_a = 0$. Por lo tanto, resolveremos (PL$_{aux}$) usando el algoritmo Simplex, lo que da a lugar a la *Fase I* del algoritmo de Simplex. Este procedimiento nos entrega además un punto extremo para (PL) en caso que este problema sea factible.

Algorithm 1 Simplex Fase I

1: En el problema (PL$_{aux}$) identificamos

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= (\underbrace{0, ..., 0}_{\in I\!R^n} | \underbrace{1, ..., 1}_{\in I\!R^m})^t \\ \tilde{A} &= [A|I] \in I\!R^{m \times (m+n)}, \end{aligned}$$

con I matriz identidad de $m \times m$.

2: Consideramos la descomposición $\tilde{B} = I$ y $\tilde{N} = A$, a la cual se asocia el siguiente punto extremo del conjunto factible de (PL$_{aux}$)

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_N \\ \tilde{x}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

▷ Ver Comentario 1

3: Esto da lugar al tableau inicial:

$$\begin{array}{cc|c} -1\!\!1^t A & 0 & -1\!\!1^t b \\ \hline A & I & b \end{array}$$

donde $1\!\!1 = (1, ..., 1)^t \in I\!R^m$. ▷ Ver Comentario 2

4: **Aplicamos Simplex a este tableau**.

5: **si** el algoritmo termina con una solución óptima donde $x_a \neq 0$ ▷ Ver Comentario 3

6: El problema (PL) es infactible.

7:

8: **si** el algoritmo termina con una solución óptima donde $x_a = 0$

9: El problema (PL) es factible y el vector que se obtiene al eliminar las variables x_a es punto extremo para (PL).

10: Del tableau final: ▷ Ver Comentario 4

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 \,..\, 0 & 1\!\!1^t & 0 \\ \hline & & & \\ I & \multicolumn{2}{c|}{\tilde{B}^{-1}\tilde{N}} & \tilde{B}^{-1}b \end{array}$$

se obtiene $B^{-1}b = \tilde{B}^{-1}b$ y $B^{-1}N$ al eliminar de $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ las columnas asociadas a las variables x_a.

11: Se calculan $\bar{z} = c_B^t B^{-1} b$ y el vector de costos reducidos $\bar{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N$. Se construye así el tableau inicial para la Fase II.

12:

Comentarios:

1. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $b_i \geq 0$ para todo $i = 1, ..., n$.
2. Así, $\mathbb{1}^t b = \sum_{i=1}^n b_i$ y $\mathbb{1}^t A_{\cdot j} = \sum_{i=1}^n A_{ij}$.
3. Notemos que, dado que $\tilde{c}^t \tilde{x} = \sum_{i=1}^m x_{a_i} \geq 0$, el problema ($\text{PL}_{aux}$) es siempre acotado.
4. Notar que en este tableau, siempre se tiene que $(\tilde{c}_N)_j = 1$ si j corresponde a una variable auxiliar y $(\tilde{c}_N)_j = 0$ si j corresponde a una variable original (del problema (PL)).

Finalizamos recordando el algoritmo de Simplex:

Algorithm 2 Simplex (Fase II)

Dado un punto extremo del poliedro $\bar{x} = [\bar{x}_B|\bar{x}_N] = [B^{-1}b|0]$

El problema se puede ver de la forma (tableau):

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{c}_N^t & -c_B^t B^{-1}b \\ \hline I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array}$$

el cual por comodidad denotamos por:

$$\begin{array}{c|c} \bar{c}^t & -\bar{z} \\ \hline \bar{A} & \bar{b} \end{array}$$

iteración

  si $\bar{c}_N^t \geq 0$

    El **óptimo** es $\bar{x} = [B^{-1}b|0]$

    parar iteración

  si $\exists (\bar{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene solamente números negativos o ceros

    El problema es **no acotado**

    parar iteración

  si $\exists (\bar{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene algún número mayor que cero

    Si x_s es la variable de la columna respectiva, se le hace entrar a la base, sacando $(x_B)_r$, con r tal que:

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r,s}} = \min_{\bar{a}_{i,s} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,s}} \right\}$$

    Pivotear en (r, s) para sacar $(x_B)_r$ e ingresar x_s:

$$\bar{a}_{i,j} \to \bar{a}_{i,j} - \bar{a}_{i,s}\frac{\bar{a}_{r,j}}{\bar{a}_{r,s}} \quad \text{si } i \neq r\,; \quad \bar{c}_j \to \bar{c}_j - \bar{c}_s \frac{\bar{a}_{r,j}}{\bar{a}_{r,s}}$$

$$\bar{a}_{i,j} \to \frac{\bar{a}_{r,j}}{\bar{a}_{r,s}} \quad \text{si } i = r\,; \quad -\bar{z} \to -\bar{z} - \bar{c}_s \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r,s}}$$

fin iteración

Problema 1 (Ejercicio *). *Resolver los siguientes problemas usando el algoritmo de Simplex fases I y II:*

$$\begin{array}{rrrrcl} \textbf{\textit{minimizar}} & -3x_1 & +4x_2 & +x_3 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ & 2x_1 & +x_2 & & \geq & 18 \\ & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrcl} \textbf{\textit{maximizar}} & -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & x_1 & +x_2 & -x_3 & & = & 1 \\ & x_1 & -x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ & 2x_1 & & +x_3 & +x_4 & \leq & 2 \\ & & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$