MA3701 Optimización: Algoritmo Simplex

Héctor Ramírez

Para un problema en forma estándar (introduciendo variables de holgura si es necesario):

$$\min c^t x \quad ; \quad Ax = b,\, x \geq 0$$

Para una descomposición $A = [B|N]$, con B matriz de $n \times n$ invertible (base), asociada a un punto extremo $\bar{x} = [\bar{x}_B|\bar{x}_N] = [B^{-1}b|0]$, se reescriben los costos $c = [c_B|c_N]$ y se descompone la variable de decisión $x = [x_B|x_N]$. Consideremos entonces el problema reescrito de la forma:

$$\begin{array}{rc}
\min & (c_N^t - c_B^t B^{-1}N)x_N + c_B^t B^{-1}b \\
\text{s.a} & x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b \\
 & x_N \geq 0 \\
 & x_B \geq 0
\end{array}$$

Recordemos finalmente el *vector de costos reducidos*: $\overline{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1}N$.

Algorithm 1 Simplex

Dado un punto extremo del poliedro $\bar{x} = [\bar{x}_B|\bar{x}_N] = [B^{-1}b|0]$

El problema se puede ver de la forma (tableau):

$$\begin{array}{cc|c}
0 & \overline{c}_N^t & -c_B^t B^{-1}b \\
\hline
I & B^{-1}N & B^{-1}b
\end{array}$$

el cual por comodidad denotamos por:

$$\begin{array}{c|c}
\overline{c}^t & -\bar{z} \\
\hline
\bar{A} & \bar{b}
\end{array}$$

iteración

  si $\overline{c}_N^t \geq 0$

    El **óptimo** es $\bar{x} = [B^{-1}b|0]$

    parar iteración

  si $\exists(\overline{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene solamente números negativos o ceros

    El problema es **no acotado**

    parar iteración

  si $\exists(\overline{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene algún número mayor que cero

    Si x_s es la variable de la columna respectiva, se le hace entrar a la base, sacando $(x_B)_r$, con r tal que:

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r,s}} = \min_{\bar{a}_{i,s}>0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,s}} \right\}$$

    Pivotear en (r,s) para sacar $(x_B)_r$ e ingresar x_s:

$$\begin{array}{rlrl}
\bar{a}_{i,j} \to \bar{a}_{i,j} - \bar{a}_{i,s}\dfrac{\bar{a}_{r,j}}{\bar{a}_{r,s}} & \text{si } i \neq r\,; & \bar{c}_j \to \bar{c}_j - \bar{c}_s\dfrac{\bar{a}_{r,j}}{\bar{a}_{r,s}} \\
\bar{a}_{i,j} \to \dfrac{\bar{a}_{r,j}}{\bar{a}_{r,s}} & \text{si } i = r\,; & -\bar{z} \to -\bar{z} - \bar{c}_s\dfrac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r,s}}
\end{array}$$

fin iteración

Problema 1. *Resolver el siguiente problema usando el método simplex:*

$$\begin{array}{rrrrcl} \textbf{\textit{minimizar}} & x_1 & +x_2 & -4x_3 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 9 \\ & x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq & 2 \\ & -x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 4 \\ & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Solución 1. *Como se pide minimizar, no es necesario hacer el cambio maximizar* $c^t x \Leftrightarrow -$*minimizar* $-c^t x$. *Poner el problema en forma estándar: (x_4, x_5, x_6 son variables de holgura)*

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

El problema ya se encuentra en la forma:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \overline{c}_N^t & -c_B^t B^{-1} b \\ \hline I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array}$$

Comenzemos a iterar:

- *Iteración 1:*

  - *Se satisface condición de línea 14, para la columna 3. Entra x_3 a la base.*
  - $\min\limits_{a_{i,3}>0} \left\{ \dfrac{b_3}{a_{i,3}} \right\} = \dfrac{b_3}{a_{3,3}}$.
    Se pivotea en $(3,3)$.
    Sale la variable básica asociada a la tercera coordenada: x_6.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{cccccc|c} -3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \\ \hline 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

- *Iteración 2:*

  - *Se satisface condición de línea 14, para la columna 1. Entra x_1 a la base.*
  - $\min\limits_{a_{i,1}>0} \left\{ \dfrac{b_1}{a_{i,1}} \right\} = \dfrac{b_1}{a_{1,1}}$.
    Se pivotea en $(1,1)$.
    Sale la variable básica asociada a la primera coordenada: x_4.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 17 \\ \hline 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 13/3 \end{array}$$

- *Iteración 3:*

  - *Se satisface condición de línea 5. El valor óptimo de la función objetivo es -17 y el vector solución es:*

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1/3 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 13/3 \end{array}$$

  - *Parar iteración*

Problema 2. *Resolver el siguiente problema usando el método simplex:*

$$\begin{array}{rrrrcl} \textbf{\textit{maximizar}} & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \leq & 3 \\ & -x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 5 \\ & & & & & \\ & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Solución 2. *Como se pide maximizar, es necesario hacer el cambio maximizar* $c^t x \Leftrightarrow -$*minimizar* $-c^t x$. *Poner el problema en forma estándar: (*x_4, x_5 *son variables de holgura)*

$$\begin{array}{ccccc|c} -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

Comenzemos a iterar:

- *Iteración 1:*

  - *Se satisface condición de línea 14, para la columna 1. Entra* x_1 *a la base.*
  - $\min\limits_{a_{i,1}>0} \left\{ \dfrac{b_1}{a_{i,1}} \right\} = \dfrac{b_1}{a_{1,1}}$.
    Se pivotea en $(1, 1)$.
    Sale la variable básica asociada a la primera coordenada: x_4.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -13/2 & 2 & 3/2 & 0 & 9/2 \\ \hline 1 & -3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & 2 & 1/2 & 1 & 13/2 \end{array}$$

- *Iteración 2:*

  - *Se satisface condición de línea 9, para la columna 2.*
  - *El problema es no acotado.*