

MA3701 Optimización. Semestre Primavera 2010

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Francisco Unda, Mauro Escobar.

Auxiliar #2

P1. Sea S un conjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$. La envoltura convexa de S , denotada por $co(S)$, es el conjunto de todas las combinaciones convexas de S . En otras palabras, $x \in co(S)$ si y sólo si existen k elementos de S , denotados por $x_1, \dots, x_k$, y k reales positivos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, tales que:

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j, \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \quad \lambda_j \geq 0, \text{ para } j \in \{1, \dots, k\}.$$

Verifique las siguientes propiedades:

- (a) Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $co(B)$ es el menor conjunto convexo que contiene a B .
- (b) Sea C un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, entonces $co(C) = C$.
- (c) Para $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$, sea $S = co(\{x_1, \dots, x_m\})$, es decir:

$$S = co(\{x_1, \dots, x_m\}) := \left\{ z = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : \lambda_i \in [0, 1] \forall i \in \{1, \dots, m\}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

- (i) Pruebe que todo punto extremo de S es necesariamente uno de los puntos x_i .
- (ii) Sea $A = \{a_1, \dots, a_l\} \subset \mathbb{R}^{m_a}$ y $B = \{b_1, \dots, b_k\} \subset \mathbb{R}^{m_b}$. Demuestre que

$$co(A \times B) = co(A) \times co(B).$$

- (iii) Calcule los puntos extremos del hipercubo en $\mathbb{R}^n$

$$[0, 1]^n := \{ z = (z_i) \in \mathbb{R}^n : z_i \in [0, 1] \forall i \in \{1, \dots, n\} \}.$$

P2. Sea S convexo. Demuestre que $x \in S$ es un punto extremo si y sólo si $S \setminus \{x\}$ es convexo.

P3. Consideremos el poliedro

$$\mathcal{P} := \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, n\} \}.$$

Escribiendo $\mathcal{P}$ en su forma estándar

$$\tilde{\mathcal{P}} := \{ (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : Ax + u = b, x_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}, u_j \geq 0 \forall j \in \{1, \dots, m\} \},$$

se tiene la equivalencia:

$$\bar{x} \text{ es punto extremo de } \mathcal{P} \iff (\bar{x}, \bar{u} := b - A\bar{x}) \text{ es punto extremo de } \tilde{\mathcal{P}}.$$

Demuestre esta afirmación.

P4. Sean $c = (c_1, \dots, c_n)^\top$, $a = (a_1, \dots, a_n)^\top$ dos vectores cuyas componentes son estrictamente positivas y $b \in \mathbb{R}$ un real estrictamente positivo. Considere el problema lineal (P):

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = c^\top x \\ \text{s.a} \quad & x \in \mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leq b, x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

- (i) Verificar que $\mathcal{P}$ es no vacío y acotado. Concluir que el problema (P) siempre tiene solución.
- (ii) Caracterizar los puntos extremos de $\mathcal{P}$.
- (iii) ¿Cuáles son los puntos extremos de $\mathcal{P}$ que son soluciones de (P)?
Describa luego el conjunto solución de (P) en función de estos puntos.
- (iv) Ilustrar los resultados precedentes con $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = b = 1$, para los casos $c = (0, 0, 1)^\top$, $c = (0, 1, 1)^\top$ y $c = (1, 1, 1)^\top$. Dibuje las soluciones del problema (P) para cada vector c .

P5. Sea C un convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $x_0 \in C$. Definiremos los siguientes conjuntos:

El conjunto de *direcciones tangentes a C en x_0* como $T_C(x_0) = \mathbb{R}_+(C - x_0)$.

El *sub-espacio facial de x_0 relativo a C* , $L_C(x_0)$, como el sub-espacio vectorial más grande contenido en $T_C(x_0)$.

La *face de x_0 en C* como $F_C(x_0) = [x_0 + L_C(x_0)] \cap C$.

- (a) Muestre que si x_0 está en el interior de C entonces $T_C(x_0) = \mathbb{R}^n$ y $F_C(x_0) = C$. Además, pruebe que x_0 es óptimo del problema (P) $\min_{x \in C} c^\top x$ si y sólo si $c^\top d \geq 0$ para todo $d \in T_C(x_0)$.
- (b) Demuestre que

$$L_C(x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0, \forall |\lambda| < \varepsilon, x_0 + \lambda d \in C\}.$$

Deduzca que $F_C(x_0)$ es la unión de todas las combinaciones convexas $[a, b]$, contenidas en C , tales que $x_0 \in (a, b)$.

- (c) Demuestre que x_0 es punto extremo de C si y sólo si $L_C(x_0) = \{0\}$, o equivalentemente $F_C(x_0) = \{x_0\}$.
- (d) Sea el poliedro $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, y consideremos $x_0 \in C$. Demuestre que

$$F_C(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x = b_i, \forall i \in I(x_0)\} \cap C,$$

donde $a_i^\top$ es el i -ésimo vector fila de A e $I(x_0) := \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i^\top x_0 = b_i\}$. Concluya que x_0 es punto extremo del poliedro C ssi $a_i^\top x_0 = b_i$ para al menos n vectores filas $a_i^\top$ que sean linealmente independientes.

Indicación: Puede serle útil mostrar que $x_0 + \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x = 0, \forall i \in I(x_0)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x = b_i, \forall i \in I(x_0)\}$.