Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-04
Probabilidades y Estadística
Primavera 2010

Guía ejercicios 2

Roberto Cortez
Víctor Carmi
Darío Cepeda

1. Se escoge un punto al azar en un segmento de largo L, lo cual lo divide en dos sub-segmentos. ¿Cuál es la probabilidad de que el sub-segmento mayor sea a lo más 4 veces más grande que el sub-segmento menor?

2. Usted llega al paradero del autobús a las 10:00. Se sabe que el autobús llegará en algún instante distribuido uniformemente entre las 10:00 y las 10:30. ¿Cuál es la distribución de probabilidad del tiempo de espera del autobús, si a las 10:10 aún no ha pasado?

3. Se dice que una variable aleatoria S tiene una distribución *chi-cuadrado con 1 grado de libertad*, anotado $S \sim \chi_1^2$, si su función densidad es

$$f_S(x) = \frac{x^{-1/2}e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Pruebe que si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ entonces $Z^2 \sim \chi_1^2$.

4. Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha el centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

5. *a*) Sea X variable aleatoria con densidad f_X simétrica, es decir, $f_X(x) = f_X(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la densidad de la variable aleatoria $|X|$ es $f_{|X|}(x) = 2f_X(x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

b) Sea X variable $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Calcule $\mathbb{E}|X|$.

6. *a*) Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Pruebe que $(X-\mu)/\sigma$ es una normal estándar.

b) Sea $X \sim \mathcal{N}(10,36)$. Calcule $\mathbb{P}(X < 5)$, $\mathbb{P}(X > 16)$ y $\mathbb{P}(4 < X < 16)$. Use una tabla de la distribución normal estándar.

7. Calcule $\mathbb{E}(X)$ si X tiene densidad dada por

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 5/x^2 & x > 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

8. Se tienen dos mazos idénticos con n cartas cada uno. La persona A extrae k_A cartas al azar del primer mazo, y la persona B extrae, independiente de A, k_B cartas al azar del segundo mazo.

a) Muestre que el número esperado de cartas que aparecen simultáneamente entre las escogidas por A y por B, es $(k_Ak_B)/n$.

b) Muestre que el número esperado de cartas que aparecen entre las escogidas por uno de ellos, pero no ambos, es $(nk_A + nk_B - 2k_Ak_B)/n$.

Indicación: defina variables indicatrices adecuadas para cada caso, y use linealidad de la esperanza.

9. Sea X variable aleatoria. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $s(\alpha) = \mathbb{E}[(X-\alpha)^2]$. Pruebe que para todo α se tiene que $s(\alpha) \geq \text{var}(X)$ y que se alcanza la igualdad sólo cuando $\alpha = \mathbb{E}(X)$.

10. Decimos que la variable aleatoria X tiene *distribución de Pareto* si su densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} c(x_m/x)^{\alpha+1} & x \geq x_m \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $x_m, \alpha > 0$ son parámetros.

a) ¿Cuál es el valor de c?

b) ¿Para cuáles α está bien definida la esperanza de X? Calcule $\mathbb{E}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

c) ¿Para cuáles α está bien definida la varianza de X? Calcule $\operatorname{var}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

d) ¿Cuál es la distribución de $\log(X/x_m)$?

11. Sean $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ variables aleatorias independientes. Pruebe que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

12. *a*) Sean X, Y variables aleatorias independientes, y sea $Z = \min(X, Y)$. Calcule F_Z en términos de F_X y F_Y.

b) Sean $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \exp(\mu)$. ¿Cuál es la densidad de $Z = \min(X, Y)$?

13. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables independientes, todas con distribución uniforme en $[0, 1]$. Sea $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Pruebe que $f_Y(y) = ny^{n-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$, y calcule $\mathbb{E}(Y)$.

14. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones generadoras de momentos dadas por

$$M_X(t) = e^{2e^t - 2} \quad \text{y} \quad M_Y(t) = \frac{e^t/2}{1 - e^t/2}.$$

Pruebe que $\mathbb{P}(XY = 1) = 1/e^2$. *Indicación:* recuerde que la función generadora de momentos caracteriza la distribución de una variable aleatoria.

15. Pruebe que la función generadora de momentos de una variable binomial con parámetros n y p es

$$(1 - p + pe^t)^n.$$

Indicación: escriba la variable de interés como suma de n variables independientes sencillas.

16. Se dice que X tiene distribución *log-normal* con parámetros μ y σ^2 si $Y = \ln(X)$ tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

a) Pruebe que la densidad de X es

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

b) Pruebe que

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \operatorname{var}(X) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

Indicación: utilice la función generadora de momentos de una variable $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

17. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & \text{si } x \in [0, 1], y \in [0, 1] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Pruebe que $c = 3/2$.

b) ¿Son X e Y independientes? Explique.

c) Calcule la densidades marginales de X e Y.

18. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{e^{-x^2}}{y^2 + 1}$$

para todo x e y.

a) ¿Son independientes? Explique.

b) Calcule las densidades marginales. ¿Qué variables conocidas son X e Y?

19. Sean X e Y variables aleatorias independientes exponenciales de parámetro $\lambda = 1$. Sean $U = X/Y$, $V = XY$. Muestre que función de densidad conjunta de U y V es

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} \frac{e^{-(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}})\sqrt{v}}}{2u} & u > 0, v > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

20. Sean X e Y variables independientes con distribución normal estándar. Determine la función de densidad conjunta de $U = X$ y $V = X/Y$. Muestre que X/Y tiene distribución de Cauchy, es decir, su densidad es

$$\frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$