Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-4 Probabilidades y Estadística, Primavera 2010

Roberto Cortez
Víctor Carmi
Darío Cepeda

Control # 2

25 de octubre de 2010
Tiempo: 3 horas

P1. *a*) (3.0 ptos.) El arancel mensual de una determinada carrera universitaria asciende a \$60. Si el ingreso per cápita mensual de la familia de un estudiante es inferior a \$50, se le asigna 100 % de beca; si el ingreso per cápita está entre \$50 y \$80, se le asigna 50 % de beca; y si está entre \$80 y \$100, se asigna un 25 %. En otro caso, no se asigna beca. Calcule el valor esperado de la beca mensual asignada a un estudiante escogido al azar, suponiendo que el ingreso per cápita mensual de la familia se distribuye uniformemente en el intervalo $[\$25, \$175]$.

b) (3.0 ptos.) Sean X e Y variables aleatorias independientes exponenciales de parámetro $\lambda = 1$. Sean $U = X/Y$, $V = XY$. Muestre que la función de densidad conjunta de U y V es

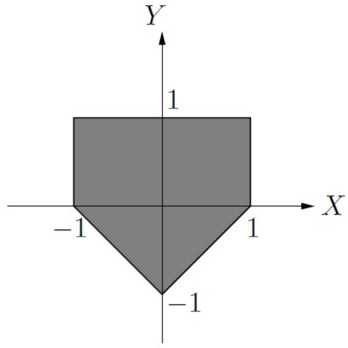
$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}})\sqrt{v}}}{2u} & u > 0, v > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

P2. *a*) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ como en la figura, y sea (X,Y) un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre A, es decir, $f_{X,Y}(x,y) = \text{área}(A)^{-1}\mathbb{1}_A(x,y)$.

1) (1.5 ptos.) Muestre que $f_X(x) = \frac{2-|x|}{3}\mathbb{1}_{[-1,1](x)}$. Calcule también la densidad marginal de Y.

2) (1.5 ptos.) Deduzca que $\mathbb{E}(X) = 0$ y muestre que $\text{cov}(X,Y) = 0$. *Indicación:* utilice sin demostrar que

$$\mathbb{E}(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy.$$



3) (1.0 pto.) ¿Son independientes X e Y? Justifique.

b) (2.0 ptos.) Se tienen dos mazos idénticos con n cartas cada uno. La persona A extrae k_A cartas al azar del primer mazo, y la persona B extrae, independiente de A, k_B cartas al azar del segundo mazo (sin reposición en ambos casos). Muestre que el número esperado de cartas que aparecen simultáneamente entre las escogidas por A y por B, es $(k_A k_B)/n$. *Indicación:* defina variables indicatrices adecuadas y use la linealidad de la esperanza.

P3. Sea X una variable aleatoria con distribución de Laplace de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2b}e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) (1.5 ptos.) Muestre que la función generadora de momentos de X es $M_X(t) = e^{\mu t}/(1 - b^2t^2)$ para $|t| < 1/b$.

b) (1.5 ptos.) Calcule la esperanza y varianza de X.

c) (1.5 ptos.) Suponiendo $\mu = 0$, calcule la densidad de $|X|$. ¿Qué variable conocida es $|X|$?

d) (1.5 ptos.) Sean $Y_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $Y_2 \sim \exp(\lambda_2)$ variables independientes. Pruebe que $\lambda_1 Y_1 - \lambda_2 Y_2$ tiene distribución de Laplace con parámetros $\mu = 0$ y $b = 1$. *Indicación:* calcule las densidades de $\lambda_1 Y_1$ y $-\lambda_2 Y_2$, y calcule la densidad de su suma utilizando una propiedad adecuada.