

Clase Auxiliar N°7: Probabilidades y Estadística

Profesor: Roberto Cortez

Auxiliares: Victor Carmi - Darío Cepeda

07 de Octubre del 2010

Definición: Sea X v.a., su momento de orden k se define como $\mathbb{E}(X^k)$.

1. Sea Y v.a. con función de densidad: $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \leq 0 \\ y, & \text{si } 0 < y \leq 1 \\ 0.5, & \text{si } 1 < y \leq 2 \\ 0, & \text{si } y > 2 \end{cases}$. Calcular:

- a) Los tres primeros momentos.
 - b) La esperanza y varianza de Y .
 - c) $\mathbb{E}(2Y + 5Y^2 - Y^3)$
2. Sea $X \sim \exp(\lambda)$. Calcular su esperanza y varianza.
3. Supongamos que una partícula es lanzada desde el origen del plano xy en línea recta y forma un ángulo θ con el eje x . Sea ξ la segunda coordenada del punto cuando la partícula choca con la recta $x = 1$. Mostrar que si el ángulo se distribuye uniformemente en $(-\pi/2, \pi/2)$, entonces: $f_\xi(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$. Esta distribución se llama distribución standard de Cauchy. Ver que es simétrica respecto al cero pero que no tiene esperanza.
4. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. independientes idénticamente distribuidas (i.i.d.), es decir, cada X_i posee la misma distribución. Sea $\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$, $S = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n}$. Calcule $\mathbb{E}(\bar{X})$, $Var(\bar{X})$ y $\mathbb{E}(S)$ en función de $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$, donde X tiene la misma distribución que los X_i .
- 5.
- a) Sean X e Y v.a. con la misma distribución y de varianza finita. Pruebe que $Cov(X + Y, X - Y) = 0$ (Def: $Cov(X, Y) = \mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\}$).
 - b) Sean X, Y, Z v.a. independientes todas con varianza igual a 1. Pruebe que $\rho(X + Y, Y + Z) = \frac{1}{2}$ (Def: $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$)