Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-04
Probabilidades y Estadística
Primavera 2010

Guía ejercicios 1, parte 2

Roberto Cortez
Víctor Carmi
Darío Cepeda

1. Un matrimonio posee dos hijos. Si se sabe que al menos uno de ellos es varón, ¿cuál es la probabilidad de que ambos lo sean?

2. Dos cajas contienen fósforos buenos y fósforos malos. Suponga que la primera caja contiene n_1 fósforos buenos y n_2 fósforos malos, y la segunda caja contiene m_1 fósforos buenos y m_2 fósforos malos. Se elige una caja al azar, y de esa caja se elige un fósforo al azar. Calcule la probabilidad de que el fósforo elegido sea bueno.

3. Se dispone de dos urnas, I y II. En la urna I hay m_1 bolitas blancas y n_1 negras; en la urna II hay m_2 blancas y n_2 negras. En un primer esquema de extracción se selecciona una urna (la urna I con probabilidad p_1 y la II con probabilidad p_2) y luego, de la urna seleccionada se extrae una bolita al azar. En el segundo esquema las bolitas de ambas urnas se juntan y se extrae al azar una bolita. Calcule la probabilidad de obtener una bolita blanca en cada uno de los esquemas descritos y muestre que ambos valores coinciden si p_1 y p_2 se escogen proporcionales a los tama nos (número total de bolitas) de las respectivas urnas.

4. Un comerciante recibe un lote de relojes importados de Asia. El lote proviene, ya sea de una fábrica en Taiwán o bien de una fábrica de Singapur. La fábrica de Singapur produce en promedio un reloj defectuoso por cada 200, pero la de Taiwán sólo 1 entre 1000. El comerciante examina un reloj y constata que funciona. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo reloj examinado funcione?

5. Un complejo sistema de ingeniería posee un interruptor automático de seguridad, que debe activarse en condiciones de falla del sistema. Suponga que la probabilidad de que el interruptor se active, dado que hay una falla es 0.99 y que la probabilidad de no activarse, dado que no hay falla también es 0.99. Finalmente, suponga que la probabilidad de que el sistema falle es 0.001. Calcule la probabilidad de que el sistema haya fallado, sabiendo que el interruptor de seguridad se activó.

6. Un ratoncito escoge al azar uno de tres posibles laberintos. Si escoge el primero, la probabilidad de que encuentre su queso de premio es de $1/2$, si escoge el segundo la probabilidad es de $1/4$, y si escoge el tercero la probabilidad es de $1/8$. ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre su queso? Si se sabe que lo encontró, ¿cuál es la probabilidad de que haya escogido el primer laberinto?

7. Sean $E_1, \dots, E_n$ eventos independientes. Pruebe que

$$\mathbb{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(E_i)).$$

8. Se dispone de dos monedas, una equilibrada y la otra con probabilidad $2/3$ de cara. Se escoge al azar una de las dos monedas, y se lanza dos veces. Sea C_i el evento en que el lanzamiento i resulta cara, para $i = 1, 2$. ¿Son independientes los eventos C_1 y C_2? Explique.

9. Se lanza una moneda equilibrada dos veces. Sea A el evento en que la primera moneda cae cara, B el evento en que la segunda moneda cae cara, y C el evento en que ambas monedas caen para el mismo lado. Muestre que estos tres eventos son independientes de a pares (es decir, A independiente de B, B independiente de C y C independiente de A), pero no son independientes en conjunto.

10. Sea $S = \{1, \dots, n\}$ y suponga que A y B son subconjuntos extraídos de manera independiente y al azar entre todos los posibles subconjuntos de S.

a) Pruebe que $\mathbb{P}(A \subseteq B) = (3/4)^n$. Indicación: condicione en la cantidad de elementos de B.

b) Pruebe que $\mathbb{P}(AB = \phi) = (3/4)^n$.

11. Se lanzan dos dados equilibrados, de manera independiente. Sea X la variable aleatoria que corresponde a la suma de los dados.

a) Dé un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P})$ que describa adecuadamente el experimento del lanzamiento de dados.

b) Escriba explícitamente X como función de este espacio en $\mathbb{R}$.

c) Escriba explícitamente el evento $\{X = 8\}$ como un subconjunto de Ω.

12. Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros (n, p). Dado $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, ¿cuál es el valor de p que maximiza $\mathbb{P}(X = k)$?

13. Se dispone de dos monedas, una con probabilidad p_1 de cara y la otra con probabilidad p_2 de cara. Se escoge una moneda al azar y se lanza sucesivamente hasta que se obtiene la primera cara. Sea X la variable aleatoria que denota el número de lanzamientos realizados. Calcule la función de distribución de X.

14. Sea X una variable aleatoria. Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos la variable aleatoria

$$\chi(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(w) \in A \\ 0 & \text{si } X(w) \notin A. \end{cases}$$

Determine el rango de χ y su función de distribución. ¿Qué variable aleatoria conocida es χ?

15. La cantidad de accidentes que ocurren en un día en una cierta autopista es una variable de Poisson con parámetro $\lambda = 3$. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran 3 ó más accidentes? ¿Cuál es esta probabilidad si se sabe que ocurrió al menos 1 accidente?

16. Una moneda con probabilidad p de cara se lanza sucesivamente hasta que se obtienen r caras. Sea X la v.a. que representa la cantidad de sellos que se obtuvieron. Calcule la función distribución de X. *Indicación:* si Y es la v.a. correspondiente a la cantidad total de lanzamientos, exprese el evento $\{X = k\}$ en términos de la variable Y.

17. Sea F la función de distribución acumulada de alguna variable aleatoria. Suponga que F es invertible.

a) Sea X variable aleatoria tal que $F_X = F$. ¿Qué variable aleatoria es $F(X)$?

b) Sea Y variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$?

18. Sea X una variable aleatoria con densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el valor de c?

b) ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X?

c) Calcule $\mathbb{P}(0 < X < 1/2)$.

19. El tiempo (en días) que un computador funciona antes fallar es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda = 1/500$. Calcule la probabilidad de que el computador funcione entre 250 y 500 días.

20. Sea $X \sim \exp(\lambda)$. Pruebe que X posee la propiedad de pérdida de memoria, es decir, $\forall t, s > 0$

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

21. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dado $a \in \mathbb{R}$, muestre que

$$\mathbb{P}(X > \mu + a) = \mathbb{P}(X < \mu - a).$$