Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-04
Probabilidades y Estadística
Primavera 2010

Guía ejercicios 1, parte 1

Roberto Cortez
Víctor Carmi
Darío Cepeda

1. Sean E y F eventos.

a) Pruebe que $\mathbb{P}(EF^c) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(EF)$.

b) Pruebe que $\mathbb{P}(E^cF^c) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(EF)$.

c) Pruebe que la probabilidad de que exactamente uno de ellos ocurra es igual a $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 2\mathbb{P}(EF)$.

2. Sean, E, F y G eventos. Pruebe que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \cup F \cup G) &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G)\\ &\quad -\mathbb{P}(E^cFG) - \mathbb{P}(EF^cG)\\ &\quad -\mathbb{P}(EFG^c) - 2\mathbb{P}(EFG).\end{aligned}$$

3. Considere un experimento cuyo espacio muestral Ω tiene una cantidad infinita numerable de elementos. Pruebe que no todos los puntos (singletons) pueden tener la misma probabilidad. ¿Es posible que todos los puntos tengan probabilidad estrictamente positiva?

4. Sea $A_1, A_2, \ldots$ una sucesión de eventos.

a) Pruebe la desigualdad de Boole:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Indicación: construya eventos disjuntos $B_1, B_2, \ldots$ tales que $B_i \subseteq A_i$ para todo $i \geq 1$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

b) Pruebe que si $\mathbb{P}(A_i) = 1$ para todo $i \geq 1$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1.$$

5. Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probablidad, y sea F un evento tal que $\mathbb{P}(F) > 0$. Definimos para todo evento $E \subseteq F$ la función $\tilde{\mathbb{P}}(E) = \mathbb{P}(EF)/\mathbb{P}(F)$. Pruebe que $(F, \tilde{\mathbb{P}})$ es un espacio de probabilidad.

6. Dos dados equilibrados se lanzan sucesivamente n veces. Defina un espacio muestral y una probabilidad adecuados para este experimento. Calcule la probabilidad de que aparezca al menos un doble 6. ¿Cuál es el primer n tal que esta probabilidad es de $1/2$ ó más?

7. Un mazo inglés (52 cartas) se revuelve y se van mostrando las cartas una por una. Dé un espacio muestral adecuado para describir este experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que la catorceava carta sea un as? ¿Cuál es la probabilidad de que el primer as aparezca en la catorceava carta?

8. Se lanza una moneda equilibrada infinitas veces.

a) Defina un espacio muestral Ω que describa adecuadamente a los posibles resultados este experimento.

b) Defina una función de probabilidad $\mathbb{P}$ adecuada sobre este Ω.

c) Sea E_n el evento en que las primeras n monedas salen cara. Escriba este evento como subconjunto de Ω.

d) Calcule $\mathbb{P}(E_n)$. ¿Qué pasa cuando n tiende a ∞?

9. Una urna contiene n bolitas blancas y m negras.

a) Se sacan dos bolitas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

b) Se saca una bolita al azar y se devuelve a la urna, luego se saca una segunda bolita al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolitas sean del mismo color?

c) Pruebe que la probabilidad del segundo caso es siempre mayor.

10. Una empresa cuenta con 15 trabajadores: 5 ingenieros y 10 técnicos. La empresa produce 2 tipos de productos A y B. El producto A requiere 3 ingenieros y 6 técnicos. El producto B requiere 2 ingenieros y 4 técnicos. ¿De cuántas maneras se pueden asignar los puestos de trabajo en la empresa?

11. En un curso de 40 alumnos deben formarse tres equipos de baby fútbol (5 jugadores) y uno de vóleibol (6 jugadores). ¿De cuántas formas pueden armarse los equipos si

a) los equipos de fútbol son distinguibles entre sí?

b) los equipos de fútbol son indistinguibles entre sí?

12. Una mano de póker consta de 5 cartas escogidas al azar del total de 52 que posee el mazo inglés. Calcule la probabilidad de obtener:

a) Color: las 5 cartas son de la misma pinta.

b) Un par: dos cartas tienen el mismo número entre sí, y las tres restantes tienen números distintos al resto y entre sí.

c) Dos pares: dos cartas tienen el mismo número entre sí, otras dos poseen el mismo número entre sí, pero distinto al anterior, y la última tiene un numero distinto al resto.

d) Un trío: tres cartas tienen el mismo número entre sí, y las dos restantes tienen un número distinto al resto y entre sí.

e) Póker: cuatro cartas tienen el mismo número.

13. Un tren, en el que se encuentran n pasajeros, debe efectuar m paradas. ¿De cuántos maneras pueden distribuirse los pasajeros entre estas paradas, suponiendo que

a) los pasajeros son distinguibles entre sí?

b) los pasajeros son indistinguibles entre sí?

c) los pasajeros son indistinguibles entre sí y se sabe que en la parada i-ésima bajan al menos n_i, para todo $i = 1, \ldots, m$? Suponga $\sum_{i=1}^{m} n_i \leq n$.

14. Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen n turnos de noche y n turnos de día. De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren de noche y $0 < b < n$ prefieren de día. El resto de los trabajadores están indiferentes entre trabajar de noche o de día. Si los turnos se reparten al azar, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda el turno que quería.

15. Una urna contiene n bolitas rojas y m azules. Se extran bolitas sucesivamente hasta que se hayan obtenido r rojas, con $r \leq n$. Calcule la probabilidad de que se extraigan k bolitas en total.

16. Considere n personas que se deben ordenar, dentro de las cuales hay un matrimonio. Si las personas se ordenan en una línea, ¿cuál es la probabilidad de que el matrimonio quede junto? ¿Cuál es esta probabilidad si las personas se ordenan en círculo?

17. Un grupo de 6 hombres y 6 mujeres es dividido al azar en dos grupos de tamaño 6 cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos grupos tengan el mismo número de hombres?

18. En una laguna hay $2n + 1$ piedras que sobresalen del agua, puestas en fila, y numeradas $-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n$. Una ranita ubicada inicialmente en la piedra 0 puede saltar una piedra hacia adelante o una piedra hacia atrás. La ranita realiza exactamente n saltos. Dado $k \in \{-n, \ldots, n\}$, ¿de cuántas formas puede haber terminado en la ranita en la piedra k?

19. Una mujer tiene n llaves, de las cuales sólo una abre la puerta. Si va probando las llaves de a una al azar, descartando aquellas que no abren la puerta, ¿cuál es la probabilidad de que abra la puerta en el k-ésimo intento? Si no descarta las llaves que no funcionan, ¿cuál es esta probabilidad?