

MA3403 - Probabilidades y Estadística.**Profesor:** Raul Gouet. **Auxiliares:** Franco Basso, Cristian Prado.

Auxiliar 13

12 de Noviembre 2010

P1. Un sistema de seguridad emite señales de alerta de manera que, durante un intervalo de tiempo de largo $t > 0$ (en horas) el número de alertas emitidas es una v.a. discreta K , con valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$ y función de probabilidad (Poisson de parámetro θt):

$$P_{\theta}(K = k) = p_{\theta}(k) = \frac{e^{-\theta t}(\theta t)^k}{k!}$$

donde $\theta \in (0, \infty) = \Theta$ es un parámetro desconocido que se requiere estimar (notar que la ley de K depende también de t pero éste no es un parámetro sujeto a inferencia). Se diseña un experimento mediante el cual se realizan observaciones independientes del sistema, durante n intervalos de tiempo, de igual duración t (conocido), contándose el número de alertas emitidas en cada uno de los intervalos. Sea $K = (K_1, \dots, K_n)$ el vector de observaciones (la muestra), donde K_i es el número de alertas en el i -ésimo intervalo.

(i) Muestre que la función de verosimilitud de la muestra está dada por:

$$p(k_1, \dots, k_n | \theta) = \frac{e^{-n\theta t}(\theta t)^{\sum_{i=1}^n k_i}}{\prod_{i=1}^n k_i!}$$

(ii) Compruebe que el estimador máximo verosímil (EMV) de θ es:

$$\theta(\hat{K}) = \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^n K_i$$

y verifique que es insesgado.

(iii) Calcule el error cuadrático medio (ecm) de $\hat{\theta}(K)$.

(iv) Suponga que se ha realizado el experimento con $n = 8$ y $t = 24$ (un día), obteniéndose los resultados siguientes, respecto del número de alertas: 1, 3, 0, 5, 2, 3, 2, 4. Calcule una estimación (numérica) para θ , a partir del EMV obtenido en (ii).

P2. Se ha podido determinar que la duración de una ampolleta de bajo consumo (en años) es una v.a. T positiva, con densidad de probabilidad $p_{\theta}(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}$, $t \geq 0$, $\theta > 0$, siendo θ un parámetro desconocido que se quiere estimar a partir de una MAS $T = (T_1, \dots, T_n)$. Las v.a. iid T_i son los tiempos de duración de las ampolletas.

(i) Calcule $E_{\theta}(T_i)$ y $Var_{\theta}(T_i)$.

(ii) Muestre que el EMV está dado por $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$

(iii) Verifique que $\hat{\theta}$ es insesgado y que el error cuadrático medio es:

$$ecm(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{n}$$

(iv) Sea $g(\theta) = P_{\theta}(T_1 > t)$, donde $t > 0$ es conocido. Muestre que $g(\theta)$ es función del primer momento. Use el método de los momentos para estimar $g(\theta)$.