

Pauta Control 2

*Profesores: Raúl Gouet
Nancy Lacourly*

*Auxiliares: Franco Basso
Mauricio Fuentes*

Problema 1

(a)

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{d_{AB} - Y} > r\right) = \mathbb{P}(Y > r d_{AB} - r Y)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{d_{AB} - Y} > r\right) = \mathbb{P}((r + 1)Y > r d_{AB})$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{d_{AB} - Y} > r\right) = \mathbb{P}\left(Y > \frac{r}{r + 1} d_{AB}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{d_{AB} - Y} > r\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{r}{r + 1} d_{AB}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{d_{AB} - Y} > r\right) = 1 - \int_0^{\frac{r}{r+1}d_{AB}} \frac{1}{d_{AB}} dy$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{d_{AB} - Y} > r\right) = 1 - \frac{r}{r + 1} d_{AB} \cdot \frac{1}{d_{AB}}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{d_{AB} - Y} > r\right) = 1 - \frac{r}{r + 1}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{Y}{d_{AB} - Y} > r\right) = \frac{1}{r + 1}}$$

(b)

Análogamente, podemos encontrar que

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{d_{AB} - Y} = s\right) = \mathbb{P}\left(Y = \frac{s}{s + 1} d_{AB}\right)$$

Como Y se distribuye de manera uniforme, cualquier punto tiene peso nulo, y se tiene que

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{Y}{d_{AB} - Y} = s\right) = 0}$$

Problema 2

Sea p la probabilidad de aprobar el examen para una rendición en particular. La probabilidad de aprobarlo en N veces corresponde a la probabilidad que el primer éxito sea la vez número N . Es decir $N \sim \text{geométrica}(p)$.

Calculemos p , para ello definamos los siguientes eventos:

$A = \text{“El joven aprueba el examen”}$

$E_i = \text{“El joven estudia } i \text{ materias”}$ con $i \in \{1, 2, 3\}$

Luego por probabilidades totales:

$$p = \mathbb{P}(A|E_0) \mathbb{P}(E_0) + \mathbb{P}(A|E_1) \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(A|E_2) \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(A|E_3) \mathbb{P}(E_3)$$

$$p = 0 \cdot (1 - \mu)^3 + \frac{1}{3} \cdot \mu (1 - \mu)^2 + \frac{2}{3} \cdot \mu^2 (1 - \mu) + 1 \cdot \mu^3$$

$$\boxed{p = p(\mu) = \frac{1}{3} \mu + \frac{2}{3} \mu^3}$$

Luego,

$$\boxed{\mathbb{P}(N = n) = p(1 - p)^{n-1}}$$

Problema 3

Sean $X, Y \sim \exp(\lambda)$ independientes. Definamos las siguientes variables aleatorias:

$$U = \frac{X}{X+Y} ; \quad V = X+Y$$

(a)

La densidad de X, Y son

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}(x)_{(0,+\infty)} \\ f_Y(y) &= \lambda e^{-\lambda y} \cdot \mathbb{I}(y)_{(0,+\infty)} \end{aligned}$$

$$\left(\mathbb{I}(t)_B = \begin{cases} 1, & t \in B \\ 0, & t \notin B \end{cases} \right)$$

Como X, Y son independientes, se tiene que

$$f_{X,Y}(x) = f_X(x)f_Y(y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \cdot \mathbb{I}(x)_{(0,+\infty)} \mathbb{I}(y)_{(0,+\infty)}$$

Definamos $H: (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ como sigue:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = H(X, Y) = (H_1(X, Y), H_2(X, Y)) = \begin{pmatrix} X/(X+Y) \\ X+Y \end{pmatrix}$$

Despejando se obtiene que

$$uv = x ; \quad v = uv + y \Rightarrow x = uv ; \quad y = v(1-u)$$

y se observa que H es biyectiva y diferenciable en su dominio, además, por un simple análisis de signos, se tiene que

$$\mathbb{I}(x)_{(0,+\infty)} \mathbb{I}(y)_{(0,+\infty)} = \mathbb{I}(u)_{(0,1)} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)} \quad (*)$$

Calculemos el Jacobiano de H

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial y} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x+y)^2} & -\frac{y}{(x+y)^2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\det(J_H(x, y)) = \frac{x}{(x+y)^2} + \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y}$$

Luego, por el método del Jacobiano

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(u, v) \left| \frac{1}{\det(J_H(x, y))} \right| = f_{X,Y}(x, y) |x + y| \Big|_{y=v(1-u)}^{x=uv}$$

$$f_{U,V}(u, v) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \cdot \mathbb{I}(x)_{(0,+\infty)} \mathbb{I}(y)_{(0,+\infty)} |x + y| \Big|_{y=v(1-u)}^{x=uv}$$

Por (*)

$$f_{U,V}(u, v) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \cdot |x + y| \Big|_{y=v(1-u)}^{x=uv} \mathbb{I}(u)_{(0,1)} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)}$$

$$\boxed{f_{U,V}(u, v) = \lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{I}(u)_{(0,1)} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)}}$$

(b) Calculemos las marginales:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u, v) dv$$

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{I}(u)_{(0,1)} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)} dv$$

$$f_U(u) = \lambda^2 \mathbb{I}(u)_{(0,1)} \int_0^{+\infty} v e^{-\lambda v} dv$$

$$f_U(u) = \lambda^2 \mathbb{I}(u)_{(0,+\infty)} \left[-\frac{1}{\lambda} v e^{-\lambda v} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda v} dv \right]$$

$$f_U(u) = \lambda^2 \mathbb{I}(u)_{(0,1)} \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\boxed{f_U(u) = \mathbb{I}(u)_{(0,1)}}$$

$$\boxed{f_U(u) = \begin{cases} 1, & u \in (0,1) \\ 0, & u \notin (0,1) \end{cases}}$$

que corresponde a la densidad de una distribución uniforme en el intervalo (0,1)

Del mismo modo

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u, v) du$$

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{I}(u)_{(0,1)} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)} du$$

$$f_V(v) = \lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}(u)_{(0,1)} du$$

$$f_V(v) = \lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)} \int_0^1 du$$

$$\boxed{f_V(v) = \lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)}}$$

Ahora calculamos las condicionales, que por definición tenemos:

$$f_{U|V}(u, v) = \frac{f_{U,V}(u, v)}{f_V(v)}$$

$$f_{U|V}(u, v) = \frac{\lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{I}(u)_{(0,1)} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)}}{\lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)}}$$

$$\boxed{f_{U|V}(u, v) = \mathbb{I}(u)_{(0,1)}}$$

y finalmente

$$f_{V|U}(u, v) = \frac{f_{U,V}(u, v)}{f_U(u)}$$

$$f_{V|U}(u, v) = \frac{\lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{I}(u)_{(0,1)} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)}}{\mathbb{I}(u)_{(0,1)}}$$

$$\boxed{f_{V|U}(u, v) = \lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{I}(v)_{(0,+\infty)}}$$

(c)

Esto se puede argumentar de dos maneras:

Basta notar que $f_{U,V}(u, v) = f_U(u) f_V(v)$ o bien, que $f_{U|V}(u, v) = f_U(u)$ y que $f_{V|U}(u, v) = f_V(v)$

De cualquier manera, se concluye que U, V son independientes.