SOLUCION CONTROL #1 DE PROBABILIDAD

MA-3403 Prof. R. Gouet, 19/04/10

1. Cumpliendo con un compromiso de campaña electoral, el presidente de un país debe escoger al mejor de n postulantes para un cargo de ministro. Los postulantes son invitados a presentarse a palacio para una breve entrevista de 10 minutos, luego de la cual serán calificados como competentes o incompetentes para el cargo. Rumores muy fundados indican que entre los n postulantes que se presentarán, hay exactamente m que son competentes (que seguirán en carrera para el cargo) y $n-m$ que no los son (a quienes se les ofrecerá un cargo de consuelo en regiones). El día señalado, los postulantes se encuentran en la sala de espera y son llamados uno por uno a la entrevista, de manera totalmente aleatoria (al azar), proceso que se prolonga por varias horas, considerando que hay muchos y que cada entrevista dura 10 minutos. El presidente tiene muchos compromisos y anuncia que debe retirarse inmediatamente después de que aparezca el primer postulante competente.
   (a) (4 pts.) Calcule la probabilidad p_k de que el presidente se retire luego de la k-ésima entrevista, donde $k = 1, 2, \ldots, n$. Determine cual es el momento más probable en que aparecerá el primer postulante competente.
   (b) (2 pts.) Cuando comienza la serie de entrevistas, el presidente recibe un email anunciando la sorpresiva llegada a palacio del embajador de Transilvania, a quien no conviene hacer esperar. Calcule la probabilidad de que, debido a las entrevistas programadas, el embajador deba esperar media hora, al menos. Suponga $n = 20, m = 3$.

Solución (a): Existen varias alternativas para modelar la situación propuesta. La primera consiste en considerar que los postulantes están numerados del 1 al n y que el ordenamiento de los mismos es una permutación de los números $1, 2, \ldots, n$, es decir, Ω es el conjunto de las permutaciones, cuyo cardinal es $n!$. Suponemos además que la permutación de los postulantes es al azar, de manera que tenemos un espacio equiprobable. Sin pérdida de generalidad podemos suponer también que los postulantes competentes tienen números del 1 al m, entonces el suceso A_k, correspondiente a la afirmación ”el primer postulante competente está en la posición k”, se caracteriza como el conjunto de las permutaciones tales que: 1) En las posiciones $1, 2, \ldots k-1$ sólo hay números de $m+1$ hasta n; 2) En la posición k hay un número entre 1 y m y 3) En las posiciones $k+1$ hasta n están todos los demás. Esto se puede contar como sigue: se escogen las primeras coordenadas de la permutación de $(n-m)!/(n-m-(k-1))!$ maneras; la coordenada k se escoge de m maneras y las últimas coordenadas se escogen de $(n-k)!$ maneras. Esto da como resultado

$$p_k = \frac{|A_k|}{n!} = \frac{(n-m)!}{(n-m-(k-1))!} \frac{m(n-k)!}{n!} = \frac{\binom{n-k}{m-1}}{\binom{n}{m}}.$$

Alternativamente podemos considerar como resultado del experimento las permutaciones posibles de postulantes competentes e incompetentes (como si fueran bolitas blancas y negras). El espacio Ω ahora tiene cardinal $\binom{n}{m}$ y A_k son las permutaciones que tienen un postulante competente en la posición k. Para calcular $|A_k|$ notamos que debemos considerar solo las permutaciones después de la posición k, que son $\binom{n-k}{m-1}$, llegando al mismo resultado para p_k. Finalmente, podemos pensar en una configuración de postulantes como una n-tupla de 0's y 1's en las cuales hay solo 0's en las primeras $k-1$ posiciones; un 1 en la posición k y en el resto de las posiciones se reparten los $m-1$ 1's restantes. Notar que la fórmula obtenida para p_k se aplica solamente si $k \leq n-m+1$. Para k en otro rango, la probabilidad es $p_k = 0$.

Para maximizar p_k observamos que $p_k = C(n-k)(n-k-1)\cdots(n-k-m)$, donde C es una constante independiente de k. Entonces p_k es una función decreciente de k y se maximiza en $k=1$, con el valor m/n, lo cual es intuitivamente claro porque el candidato que entra primero a la entrevista es escogido al azar entre los n y tiene una probabilidad m/n de ser del grupo competente.

Una solución alternativa (sugerida por el P. Auxiliar C. Prado) consiste en observar que $A_k = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \overline{A}_{k-1} \cap A_k$ y aplicar la fórmula del producto. Es decir

$$P(A_k) = P(A_k|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \overline{A}_{k-1})P(\overline{A}_{k-1}|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \overline{A}_{k-2}) \cdots P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1),$$

donde las probabilidades condicionales se calculan fácilmente. Por ejemplo,

$$P(A_k|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \overline{A}_{k-1}) = \frac{m}{n-k+1}.$$

Solución (b): Para que el embajador espere al menos 30 minutos, el primer candidato competente debe aparecer en la entrevista 3, 4, 5,.. etc. O bien, no aparecer en la primera ni la segunda. Esto tiene probabilidad $p = 1 - P(A_1) - P(A_2)$. Aplicando la fórmula, con los valores dados para n y m, se obtiene $p = 1 - 3/20 - (17/20)(3/19) = 0.7158$.

2. Considere tres muebles idénticos A, B y C, cada uno de los cuales tiene dos cajones. Suponga que A contiene una moneda de plata en cada cajón; que C contiene una moneda de oro en cada cajón y B una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro. Suponga que se escoge un mueble al azar, se abre un cajón y se encuentra una moneda de plata.
   (a) (3 pts.) Calcule la probabilidad de que el otro cajón contenga una moneda de oro.
   (b) (2 pts.) Cuál es la probabilidad de que el mueble escogido haya sido A, B, C?

Solución (a): Se propone una solución relativamente sencilla del problema. Dado que se habla del metal de la moneda escogida y de la "otra moneda", que es la no escogida, optamos por considerar el siguiente espacio muestral:

$$\Omega = \{(x,y,z)|x \in \{A,B,C\}; y,z \in \{Ag, Au\}\},$$

donde x representa el mueble escogido, y el metal de la moneda escogida y z el metal de la moneda no escogida (la del otro cajón). Es fácil dotar a Ω de una probabilidad aunque, como veremos, no se trata de un espacio equiprobable. Primero veamos que Ω tiene solo 4 elementos en lugar de los 12 potenciales ($3 \times 2 \times 2$). Descartando las ternas no observables tenemos

$$\Omega = \{(A, Ag, Ag), (B, Ag, Au), (B, Au, Ag), (C, Au, Au)\}.$$

Dado que muebles y cajones son escogidos al azar, la probabilidad de escoger un mueble cualquiera y un cajón cualquiera es $1/6$. Así, para que observemos (A, Ag, Ag) tenemos que escoger el mueble A y cualquier cajón, es decir $P(\{(A, Ag, Ag)\}) = 1/3$. Análogamente tenemos que $P(\{(B, Ag, Au)\}) = 1/6 = P(\{(B, Au, Ag)\})$ y finalmente $P(\{(C, Au, Au)\}) = 1/3$. Consideremos los sucesos de interés $S =$ "la moneda escogida es de plata" y $T =$ "la otra moneda es de oro". Entonces $S = \{(A, Ag, Ag), (B, Ag, Au)\}$ y $T = \{(B, Ag, Au), (C, Au, Au)\}$. Nos piden evaluar

$$P(T|S) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{P(\{(B, Ag, Au)\})}{P(\{(A, Ag, Ag)\}) + P(\{(B, Ag, Au)\})} = \frac{1/6}{1/3 + 1/6} = \frac{1}{3}.$$

Solución (b): Los sucesos de interés en esta parte son $A =$ "el mueble escogido es A, $B =$ "el mueble escogido es B y $C =$ "el mueble escogido es C. Notamos que $A = \{(A, Ag, Ag)\}, B = \{(B, Ag, Au), (B, Au, Ag)\}$ y $C = \{(C, Au, Au)\}$. Nos piden evaluar $P(A|S), P(B|S)$ y $P(C|S)$, para lo cual usamos la definición de probabilidad condicional:

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(\{(A, Ag, Ag)\})}{1/2} = \frac{2}{3},$$

$$P(B|S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(\{(B, Ag, Au)\})}{1/2} = \frac{1}{3}$$

y

$$P(C|S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{P(\emptyset)}{1/2} = 0.$$

3. Sean A, B, C sucesos relativos a un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
   (a) (3 pts.) Muestre que

   $$P(A \cup B) = P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(B).$$

   (b) (3 pts.) Sea D el suceso "al menos dos sucesos entre A, B y C ocurren". Muestre que

   $$P(D) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2P(A \cap B \cap C).$$

Solución (a): Si $P(A) < P(B)$ entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) < 2P(B) - P(A \cup B),$$

los cual es equivalente a $P(A \cup B) < P(B)$ (contradicción porque, debido a la monotonía de P, $P(A \cup B) \geq P(B)$). De igual manera, si suponemos que $P(B) < P(A)$ llegamos a la contradicción $P(A \cup B) < P(A)$. Concluimos entonces que $P(A) = P(B)$.

Solución (b): El suceso D puede escribirse como

$$D = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Aplicando la fórmula de inclusión exclusión para tres sucesos obtenemos

$$P(D) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \blacksquare$$

de la cual se deduce el resultado.