Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3401 09-1, 6/04/09

Solución Control # 1

Raúl Gouet

P1. Uno de los casinos recientemente inaugurados en el país propone un juego "secuencial" que consiste en apostar en máquinas tragamonedas que funcionan independientemente, cada una con una probabilidad $p > 0$ de entregar premio. El jugador tiene acceso a la primera máquina, donde juega, pudiendo ganar o perder. Si gana debe cobrar su premio e irse del casino pero si pierde debe jugar en la segunda máquina. Nuevamente, si gana cobra el premio y deja el casino pero si pierde continúa en la tercera máquina, en la cual gana o pierde y se se retira del casino. Considere los sucesos G_i : "el jugador recibe el premio de la máquina i", $i = 1, 2, 3$.

i) (1.2 ptos.) Explique por qué los sucesos G_i son disjuntos y pruebe que

$$P(G_i) = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Solución: Los sucesos G_i son disjuntos simplemente porque el enunciado lo dice (implícitamente).

En efecto, si G_1 ocurre entonces no puede ocurrir ni G_2 ni G_3; si G_2 ocurre no puede ocurrir G_3 porque solo se gana una vez. Para calcular las probabilidades usamos la regla de probabilidades totales. Observemos primero del enunciado que $P(G_1) = p = p(1-p)^{1-1}$. Por otra parte, notando que $P(G_2|\overline{G}_1) = p$, tenemos

$$P(G_2) = P(G_2|G_1)P(G_1) + P(G_2|\overline{G}_1)P(\overline{G}_1) = 0 \cdot p + p \cdot (1-p) = p(1-p)^{2-1}.$$

Finalmente,

$$P(G_3) = P(G_3|G_1 \cup G_2)P(G_1 \cup G_2) + P(G_3|\overline{G_1 \cup G_2})P(\overline{G_1 \cup G_2}).$$

Observamos que $P(G_3|G_1 \cup G_2) = 0$, $P(G_3|\overline{G_1 \cup G_2}) = p$ y $P(\overline{G_1 \cup G_2}) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2}) = P(\overline{G_2}|\overline{G_1})P(\overline{G_1}) = (1-p)^2$. Reemplazando arriba se obtiene $P(G_3) = p(1-p)^{3-1}$.

ii) (1.2 ptos.) Calcule la probabilidad de que el jugador no gane.

Solución: El suceso "no ganar" es el complemento de $G_1 \cup G_2 \cup G_3$, de manera que su probabilidad es

$$1 - P(G_1) - P(G_2) - P(G_3) = 1 - p - p(1-p) - p(1-p)^2.$$

iii) (1.2 ptos.) Averigüe si G_1, G_2 y G_2, G_3 son o no pares de sucesos independientes.

Solución: Notemos que

$$0 = P(G_1 \cap G_2) \quad \text{y} \quad P(G_1)P(G_2) = p^2(1-p),$$

es decir, los sucesos son independientes si $p = 0, 1$ y no lo son si $p \in (0, 1)$. También

$$0 = P(G_2 \cap G_3) \quad \text{y} \quad P(G_2)P(G_3) = p^2(1-p)^3,$$

y se llega a la misma conclusión.

iv) (1.2 ptos.) Sabiendo que el jugador ha ganado, calcule la probabilidad de que el premio lo haya obtenido en la máquina i, $i = 1, 2, 3$.

Solución: Aquí debemos calcular las probabilidades condicionales

$$P(G_1|G_1 \cup G_2 \cup G_3) = \frac{P(G_1 \cap (G_1 \cup G_2 \cup G_3))}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{P(G_1)}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{1}{1 + (1-p) + (1-p)^2},$$

$$P(G_2|G_1 \cup G_2 \cup G_3) = \frac{P(G_2 \cap (G_1 \cup G_2 \cup G_3))}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{P(G_2)}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{1-p}{1 + (1-p) + (1-p)^2},$$

$$P(G_3|G_1 \cup G_2 \cup G_3) = \frac{P(G_3 \cap (G_1 \cup G_2 \cup G_3))}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{P(G_3)}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{(1-p)^2}{1 + (1-p) + (1-p)^2}.$$

Notar que la suma de las tres probabilidades anteriores da 1, como debe ser.

v) (1.2 ptos.) Suponga que en lugar de 3 máquinas hay infinitas máquinas funcionando como se describe arriba. Muestre que la probabilidad del suceso G : "ganar premio" es 1, expresando G en términos de los $G_i, i = 1, 2, \ldots$

Solución: Generalizamos la idea anterior suponiendo que $P(G_i) = p(1-p)^{i-1}, i = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces, si G es el suceso "ganar alguna vez", tenemos $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ y, aplicando la σ-aditividad dado que los sucesos son disjuntos, se tiene

$$P(G) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = 1.$$

P2. Una partícula se desplaza aleatoriamente por $\mathbb{Z}_+^2 = \{0, 1, \ldots\}^2$ partiendo de $(0,0)$ y dando un total de n pasos unitarios, ya sea hacia arriba o hacia la derecha. Suponga que el espacio muestral es el conjunto de las trayectorias $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{a, d\}, i = 1, \ldots, n\}$ (a =arriba, d =derecha) y que todas las trayectorias tienen igual probabilidad (espacio equiprobable).

(a) (2 ptos.) Calcule la probabilidad de que la partícula termine su recorrido en el punto de coordenadas $(p, q); p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Solución: Sea $A_{p,q}^n$ el suceso "la partícula termina en (p,q) en n pasos". Dado que la partícula camina un total de n pasos, $P(A_{p,q}^n) = 0$ si $p + q \neq n$. Supongamos entonces que $p + q = n$. El espacio Ω tiene 2^n elementos y es equiprobable, de manera que, para calcular $P(A_{p,q}^n)$ basta contar los elementos (trayectorias) de $A_{p,q}^n$. Notamos que debe haber p pasos a la derecha y q hacia arriba, distribuidos de cualquier forma entre los n pasos. Esto puede hacerse de $\binom{n}{p}$ maneras y resulta

$$P(A_{p,q}^n) = \binom{n}{p} 2^{-n}.$$

(b) (2 ptos.) Sean $p, q \in \mathbb{Z}_+$ tales que $p + q = n$. Calcule la probabilidad de que la partícula termine en (p, q) y que pase por el punto $(i, j) \in \mathbb{Z}_+^2$, tal que $i + j \leq n$.

Solución: En este cálculo hay que tener presente que la pasada por el punto (i,j) sea "compatible" con la llegada a (p,q). Dado que la partícula no puede ir hacia la izquierda o hacia abajo y, además, debe llegar a (p,q) entonces no puede pasar por (i,j) tal que $i > p$ o $j > q$. Sea entonces $B_{i,j,p,q}^n$ el suceso de interés y supongamos que $i \leq p$ y $j \leq q$. Notemos que este suceso puede escribirse como la intersección de los sucesos $A_{i,j}^{i+j}$ ="la partícula llega a (i,j) en $i+j$ pasos, partiendo de $(0,0)$" y $C_{p,q}^{n-(i+j)}$ ="la partícula llega a (p,q) en $n-(i+j)$ pasos, partiendo de (i,j)". Aquí es importante notar que en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que trabajamos, las "decisiones" de la partícula en cada paso son independientes (de hecho son ensayos de Bernoulli independientes) y en Ω hemos introducido la probabilidad producto. Dado lo anterior, los sucesos $A_{i,j}^{i+j}$ y $C_{p,q}^{n-(i+j)}$ son independientes. Además, haciendo una traslación hacia el origen tenemos

$$P(C_{p,q}^{n-(i+j)}) = P(A_{p-i,q-j}^{n-(i+j)}) = \binom{n-i-j}{p-i} 2^{-(n-i-j)}.$$

Finalmente

$$P(B^n_{i,j,p,q}) = P(A^{i+j}_{i,j} \cap C^{n-(i+j)}_{p,q}) = P(A^{i+j}_{i,j}) P(A^{n-(i+j)}_{p-i,q-j}) = \binom{i+j}{i} 2^{-(i+j)} \binom{n-i-j}{p-i} 2^{-(n-i-j)}.$$

El resultado anterior también puede obtenerse razonando combinatorialmente. El número de trayectorias que pasan por (i,j) es $\binom{i+j}{i}$. Por cada trayectoria que llega a (i,j) hay $\binom{n-i-j}{p-i}$ trayectorias que van de (i,j) a (p,q), por lo tanto, el número de trayectorias es el producto de ambos coeficientes binomiales. Para obtener la probabilidad dividimos por 2^n, que es el cardinal de Ω, y obtenemos

$$P(B^n_{i,j,p,q}) = \binom{i+j}{i} \binom{n-i-j}{p-i} 2^{-n}.$$

(c) (2 ptos.) Sabiendo que la partícula pasa por $(i,j), i+j < n$, calcule la probabilidad de que llegue a $(p,q), p+q = n$.

Solución: Aquí tenemos una probabilidad condicional, específicamente $P(A^n_{p,q} | A^{i+j}_{i,j})$. Notemos que $A^n_{p,q} \cap A^{i+j}_{i,j} = A^{i+j}_{i,j} \cap C^{n-(i+j)}_{p,q} = B^n_{i,j,p,q}$ de manera que

$$P(A^n_{p,q} | A^{i+j}_{i,j}) = \frac{P(A^{i+j}_{i,j} \cap C^{n-(i+j)}_{p,q})}{P(A^{i+j}_{i,j})} = \frac{P(B^n_{i,j,p,q})}{P(A^{i+j}_{i,j})} = \frac{\binom{i+j}{i}\binom{n-i-j}{p-i} 2^{-n}}{\binom{i+j}{i} 2^{-(i+j)}} = \binom{n-i-j}{p-i} 2^{-(n-i-j)}.$$

P3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{A_n : n \geq 1\}$ una familia numerable de sucesos independientes. Sean $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$ y $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m$. Suponga que $p_n = P(A_n), n \geq 1$, y que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$.

(a) (2 ptos.) Muestre que $P(\liminf\limits_{n\to\infty} \overline{A}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{m=n}^{N} (1 - p_m)$.

Solución: Debido a que $\{\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} \overline{A}_m\}_n$ es una familia creciente de sucesos, podemos invocar la continuidad monótona de la probabilidad P y escribir

$$P(\liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{m=n}^{\infty} \overline{A}_m).$$

Por otra parte, $\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} \overline{A}_m$ es límite de la familia decreciente de sucesos $\{\bigcap\limits_{m=n}^{N} \overline{A}_m\}_N$ y, aplicando nuevamente la continuidad monótona de P, obtenemos

$$P(\liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} P(\bigcap_{m=n}^{N} \overline{A}_m).$$

Para concluir notamos que los sucesos $\{\overline{A}_m\}$ son independientes, de manera que

$$P(\bigcap_{m=n}^{N} \overline{A}_m) = \prod_{m=n}^{N} P(\overline{A}_m) = \prod_{m=n}^{N} (1 - p_m).$$

(b) (2 ptos.) A partir de la desigualdad $1 - x \leq e^{-x}$, concluya de (a) que $P(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = 1$.

Solución: De la desigualdad podemos concluir de inmediato que

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{m=n}^{N}(1-p_m) \leq \lim_{N\to\infty} e^{-\sum_{m=n}^{N} p_m} = e^{-\sum_{m=n}^{\infty} p_m} = 0, \forall n,$$

porque la serie de las probabilidades es divergente. Por lo tanto, $P(\liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n) = 0$. Finalmente usamos la identidad $\overline{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n$ para concluir que $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

(c) (2 ptos.) Aplique el resultado de (b) para mostrar que en una sucesión de lanzamientos independientes de una moneda, con probabilidad constante de cara igual a $p \in (0,1)$, aparecen infinitas caras e infinitos sellos con probabilidad 1.

Solución: Tenemos una sucesión de lanzamientos independientes, por lo tanto, $\{C_n\}_n$ y $\{\overline{C}_n\}_n$ son familias de sucesos independientes, donde $C_n =$"sale cara en la tirada n". Además, $P(C_n) = p > 0$ y $P(\overline{C}_n) = 1-p > 0$, $\forall n$, y resulta entonces que ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} P(\overline{C}_n)$ son divergentes. Aplicando el resultado demostrado (que lleva el nombre de Lema de Borel-Cantelli divergente) se puede concluir que los sucesos $C_\infty := \limsup_{n\to\infty} C_n$ y $\overline{C}_\infty := \limsup_{n\to\infty} \overline{C}_n$ tienen ambos probabilidad 1. Sin embargo, nos piden mostrar que la probabilidad de infinitas caras e infinitos sellos es 1, es decir que $P(C_\infty \cap \overline{C}_\infty) = 1$. Para ello demostraremos que la intersección de dos sucesos cualesquiera, de probabilidad 1, es un suceso de probabilidad 1. En efecto, sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $P(A) = P(B) = 1$ entonces, usando la desigualdad de Boole,

$$P(A\cap B) = 1 - P(\overline{A}\cup\overline{B}) \geq 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) = 1 - 0 - 0.$$

Tiempo: 2 horas y 30 minutos