MA3403-2 Probabilidades y Estadística **24 de agosto, 2009**

Pauta Control 1

Profesores: Raúl Gouet
Nancy Lacourly

Auxiliares: Franco Basso
Mauricio Fuentes

Problema 1

(a) Tenemos que probar que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) \implies \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$

o equivalentemente,

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A \cap B) \implies \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$$

en efecto, por contradicción:

Supongamos $\mathbb{P}(A) < P(B)$

$$2\mathbb{P}(A) < P(A) + \mathbb{P}(B) = \underbrace{2\mathbb{P}(A \cap B) \leq 2\mathbb{P}(A)}_{A \cap B \subseteq A \text{ y } \mathbb{P} \text{ es creciente}}$$

de donde

$$\mathbb{P}(A) < P(A)$$

lo cual es una contradicción.

Ahora, si $\mathbb{P}(A) > P(B)$, por simetría del argumento anterior, también se obtiene una contradicción, dejando como única opción que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

Para el caso general supongamos por contradicción que existen k_1 y k_2 tal que $\mathbb{P}(A_{k1}) < \mathbb{P}(A_{k2})$ para k_1 y k_2 distintos.

Ahora bien

$$\mathbb{P}(A_{k2}) \leq \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) \leq \mathbb{P}(A_{k1})$$

Lo que es una contradicción. De modo análogo concluimos que no es posible que

$$\mathbb{P}(A_{k1}) > P(A_{k2})$$

Así
$$\mathbb{P}(A_{k1}) = \mathbb{P}(A_{k2})$$

Luego
$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \cdots = \mathbb{P}(A_n)$$

(b) Contemos los casos:

Número total de maneras que los clientes escojan las compañías: 3^n

Nos interesa encontrar el número de maneras de asignar a los clientes una compañía, de modo que las tres tengan al menos un cliente, lo que equivale, al total de casos, restarle el número de maneras en que al menos una compañía no tenga clientes:

Si uno fija las compañías:

Repartir los n clientes en una compañía: Sólo pude hacerse de una manera.

Repartir los n clientes en dos compañías: Esto se hace de $2^n - 2$ maneras (pues descontamos los casos en que todos escogen una, sino lo estaríamos recontando)

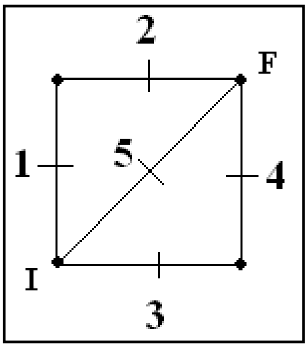
Ahora siendo cualquiera la compañía que no es elegida, por principio aditivo, lo anterior se puede hacer de $3(2^n - 2 + 1) = 3(2^n - 1)$
Finalmente, la probabilidad buscada es:

$$p = \frac{3^n - 3(2^n - 1)}{3^n}$$

$$p = 1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

<u>Problema 2</u>

Tenemos el siguiente esquema:



(a)

Definamos el siguiente evento:

$A_i =$ No hay policía en el camino i

Si queremos llegar de I a F sin multa, necesitamos:

$$E = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \cup A_5$$
Luego,

$$f(p) = \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_5) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_5) \\ - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4 \cap A_5) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

Pero por independencia,

$$f(p) = p^2 + p^2 + p - p^3 - p^3 - p^4 + p^5$$

$$f(p) = p + 2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5$$

Como es de esperar $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

(b) La probabilidad que haya sólo un policía en un camino dado es $(1-p)p^4$ y como no sabemos en qué camino estará el policía, la probabilidad que haya sólo un policía en algún camino es $5(1-p)p^4$

(c) Sabemos que hay exactamente un policía. La probabilidad que esté en los caminos laterales es de $\frac{2}{5}$ y de que esté en la diagonal es $\frac{1}{5}$, pues el policía puede estar equiprobablemente en cada trazo. Luego es conveniente ir por la diagonal.

Problema 3

(a)

Definamos los siguientes eventos:

PB = "Pedro dice que la bola es blanca"
B = "La bola es blanca"
M="Pedro miente"

Luego, nos interesa:

$$\mathbb{P}(B|PB) = \frac{\mathbb{P}(PB|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(PB)}$$

Por enunciado:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{b}{(b+n)}$$

$$\mathbb{P}(PB|B\ ) = \mathbb{P}(M^c) = \ 1-p$$

Solo nos falta $\mathbb{P}(PB)$. Calculemos usando independencia:

$$\mathbb{P}(PB) = \mathbb{P}(B \cap M^c) + \mathbb{P}(B^c \cap M) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(M^c) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(M)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mathbb{P}(PB) = \frac{b - bp + np}{b+n}$$

Y asi el resultado pedido es :

$$\boxed{\mathbb{P}(B|PB) = \frac{b - bp}{b - bp + np}}$$

(b) Utilizando un razonamiento similar debemos calcular

$$\mathbb{P}(B|PB) = \frac{\mathbb{P}(PB|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(PB)}$$

Por enunciado:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{b}{(b+n)}$$

$$\mathbb{P}(PB|B\ ) = \ 1 - p$$

Solo nos falta $\mathbb{P}(PB)$. Calculemos $\mathbb{P}(PB) = \mathbb{P}(B \cap M^c) + \mathbb{P}(B^c \cap M)$ esta vez no se puede ocupar independencia .

$$\mathbb{P}(PB) = \mathbb{P}(M^c|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(M|B^c)\mathbb{P}(B^c)$$

Donde por enunciado

$$\mathbb{P}(M^c|B) = 1 - p$$
$$\mathbb{P}(M|B^c) = q$$

Luego,

$$\mathbb{P}(PB) = \frac{b - bp + nq}{b + n}$$

Asi el resultado pedido es:

$$\boxed{\mathbb{P}(B|PB) = \frac{b - bp}{b - bp + nq}}$$

Notar que si q=p entonces se recupera el resultado de la parte anterior.