Ejercicios Resueltos de Probabilidad

Juan José Salazar González   Marta López Yurda

Índice general

Prólogo **9**

1. Combinatoria **11**

2. Fundamentos de probabilidades **23**

3. Distribuciones de probabilidad **85**

4. Principales variables aleatorias **109**

5. Variables aleatorias bidimensionales **145**

6. Convergencia **169**

7. Regresión y correlación **177**

Bibliografía **183**

Prólogo

≪Un día sale en el periódico que un inversor ha logrado preveer el éxito o fracaso de ciertas operaciones complejas de bolsa durante las últimas 10 jornadas. ¿Se dejaría asesorar por él para que le rentabilizase sus ahorros? Sin duda, mucha gente respondería afirmativamente.

Consideremos 1000 monos durante diez días. Cada día le asociamos, a cada uno, la respuesta "éxito en la inversión" si se levanta con el pie derecho, y "fracaso en la inversión" si se levanta con el pie izquierdo. Entonces, cada día aproximadamente la mitad acertará, y para el día siguiente consideramos sólo esos. Es decir, el primer día 500 monos acertarán la operación justa, de los que 250 también acertarán la segunda, y de ellos 125 la tercera, etc. Transcurridos los diez días es muy probable que tengamos un mono que haya acertado todas las operaciones. ¡Este sería el mono al que esas personas le darían su dinero!≫

Este libro contiene 139 ejercicios resueltos de *Probabilidades.* No se trata de una colección exclusiva de problemas difíciles de resolver, desafiantes y sólo aptos para alumnos brillantes. Por el contrario, se trata de una lista de ejercicios de dificultad variada que pretende ayudar a cualquier alumno que se inicie en el *Cálculo de Probabilidades.* En ella hay ejercicios clásicos, algunos tomados de libros mencionados en la bibliografía, con distinto grado de dificultad, tratando de configurar una gama de problemas apropiados para un primer curso de Probabilidades.

Cada capítulo inicia con un resumen teórico que pretende establecer la notación básica que luego se usa en la resolución de sus ejercicios. Dado que no ha sido objetivo el extendernos en la parte teórica, algunos conceptos se presentan de forma simplificada (como los referentes a la Ley Fuerte de los

Grandes Números o al de regresión). Por ello, recomendamos que este material sirva sólo para controlar que sus ejercicios han sido correctamente resueltos por el lector, quien previamente ha debido trabajarlos por su cuenta, pero nunca como libro de texto en sí mismo, y aún menos como libro de teoría.

El primer capítulo se dedica a la Combinatoria y el segundo la utiliza para el cálculo elemental de probabilidades, incluyendo la probabilidad condicionada. El tercer capítulo introduce los conceptos de variable aleatoria, función de distribución y esperanza matemática, entre otros. Los ejercicios del cuarto capítulo tratan sobre variables aleatorias tradicionales, tanto discretas como continuas. Las variables aleatorias bidimensionales se afrontan en el capítulo quinto. El capítulo sexto presenta ejercicios de convergencia, y el séptimo ejercicios sencillos de regresión y correlación.

Esta colección se ha desarrollado impartiendo durante varios cursos la asignatura *Probabilidades I*, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna. Por ello, la resolución de varios problemas subraya conceptos abstractos como el de espacio muestral, etc. Creemos que este rigor matemático (nunca excesivo) es aconsejable también para alumnos de facultades de Ingenierías, Económicas, Biología, etc., y en este sentido deseamos que el estilo de resolución en este libro le puedan también ser de ayuda.

Aunque los errores que aparecen son responsabilidad exclusiva de los autores, han sido varias las personas que han realizado aportaciones a este libro. De forma especial queremos destacar las valiosas sugerencias que hemos recibido de José Juan Cáceres Hernández (*Departamento de Economía de las Instituciones, Estadística Económica y Econometría*, ULL) y de Carlos González Alcón (*Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación*, ULL). También agradecemos al *Gobierno de Canarias* que, a través del proyecto de investigación PI2000/116, ha financiado parcialmente el trabajo realizado.

JUAN JOSÉ SALAZAR GONZÁLEZ y MARTA LÓPEZ YURDA.
Tenerife, a 14 de agosto de 2001.

CAPÍTULO 1

Combinatoria

La *Combinatoria* es el arte de contar los posibles elementos de un conjunto, teniendo especial cuidado en no olvidar ningún elemento ni en contarlo más de una vez. A continuación resaltamos seis casos típicos:

Permutaciones de n elementos: Dados n elementos distintos, el número de secuencias ordenadas de éstos es

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1.$$

Este número también se denota como $n!$.

Permutaciones con repetición de n elementos, con n_i repeticiones del i-ésimo elemento, $i = 1, \ldots, k$: Dados n elementos, de los cuales hay sólo k diferentes (n_1 iguales, n_2 iguales,…,n_k iguales, con $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$), el número de secuencias ordenadas de estos elementos es

$$PR_n^{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Variaciones de n elementos tomados de m en m (con $m \leq n$): Dados n elementos distintos, el número de selecciones ordenadas de m de ellos es

$$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m: Dados n elementos distintos, el número de selecciones ordenadas de m de ellos, pudiendo ocurrir que un mismo elemento aparezca más de una vez en la selección, es

$$VR_{n,m} = n^m.$$

Combinaciones de n elementos tomados de m en m (con $m \leq n$): Dados n elementos distintos, el número de maneras de seleccionar m de ellos (sin tener presente el orden) viene dado por

$$C_{n,m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Este número también se denota como $\binom{n}{m}$.

Combinaciones con repetición de n elementos tomados de m en m: Dados n elementos distintos, el número de selecciones de m de ellos, sin tener presente el orden y pudiendo haber elementos repetidos en una selección, es

$$CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m}.$$

Ejercicios Resueltos

P1.1] ¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 personas en un banco si hay 4 sitios disponibles?

Solución

Nótese que importa el orden en que se sienten las personas, ya que los cuatro sitios son diferentes, y que una persona no puede ocupar más de un sitio a la vez. Por lo tanto, hay $V_{10,4} = 10!/6! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ maneras.

P1.2] En una clase de 10 alumnos van a distribuirse 3 premios. Averiguar de cuántos modos puede hacerse si:

1. los premios son diferentes;
2. los premios son iguales.

Solución

Hay dos supuestos posibles:

- si una misma persona no puede recibir más de un premio:

1. hay $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ maneras de distribuir los premios si éstos son diferentes;
2. en el caso de que los premios sean iguales, pueden distribuirse de $C_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8/6 = 120$ maneras.

- si una misma persona puede recibir más de un premio:
  1. se pueden distribuir los premios, si éstos son diferentes, de $VR_{10,3}$ $=10^3 = 1000$ maneras;
  2. hay $CR_{10,3} = 220$ maneras de distribuir los premios si éstos son iguales.

P1.3] Las diagonales de un polígono se obtienen uniendo pares de vértices no adyacentes.

1. Obtener el número de diagonales del cuadrado, el hexágono y el octógono. Calcularlo para el caso general de un polígono de n lados.
2. ¿Existe algún polígono en el que el número de lados sea igual al de diagonales?

Solución

1. Comenzamos calculando el número de diagonales del cuadrado. Hay $C_{4,2} = 6$ uniones posibles de dos vértices diferentes cualesquiera, adyacentes o no. Si de estas 6 parejas eliminamos las que corresponden a vértices adyacentes (tantas como el número de lados del cuadrado), quedarán $6 - 4 = 2$ diagonales.
   Procediendo del mismo modo con el hexágono, se obtienen
   $$C_{6,2} - 6 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} - 6 = 15 - 6 = 9 \text{ diagonales.}$$
   Análogamente, en el caso del octógono, se obtienen
   $$C_{8,2} - 8 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} - 8 = \frac{8 \cdot 7}{2} - 8 = 28 - 8 = 20 \text{ diagonales.}$$
   Finalmente, para el caso general de un polígono de n lados, el número de diagonales es:
   $$C_{n,2} - n = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} - n = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} \ .$$
2. Veamos si existe algún polígono donde el número de lados sea igual al número de diagonales. Igualando el número de lados y el número de diagonales se obtiene:
   $$n = \frac{n^2 - 3n}{2},$$

es decir,

$$n(n-5)=0.$$

Como $n \geq 1$, el resultado $n=0$ no es válido. La solución es $n=5$ (el pentágono).

P1.4] Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

Solución

Ya que la fila es de 9 individuos en total, hay 4 posiciones pares (que deben ser ocupadas por las 4 mujeres) y 5 posiciones impares (para los 5 hombres). Por lo tanto, pueden colocarse de $P_4 \cdot P_5 = 4! \cdot 5! = 2880$ maneras.

P1.5] ¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden formar con las cifras 0,1,...,9

1. permitiendo repeticiones;
2. sin repeticiones;
3. si el último dígito ha de ser 0 y no se permiten repeticiones?

Solución

Asumamos que para que un número sea de 4 dígitos su primer dígito debe ser distinto de cero.

1. Puesto que debe formarse un número de 4 dígitos, el primero de éstos no puede ser cero. Por lo tanto, hay nueve posibilidades para el primer dígito y diez para cada uno de los tres dígitos restantes, obteniéndose un total de $9 \cdot 10^3 = 9000$ números posibles.
2. Al igual que en el apartado anterior, el primer dígito no puede ser cero. Como además no se permiten repeticiones, hay nueve posibilidades para el segundo dígito: el cero y las ocho no escogidas para el primer dígito. Por tanto, se pueden formar $9^2 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ números.
3. Fijamos el último dígito y, como no puede haber repeticiones, se obtiene un total de $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$ números.

P1.6] En un grupo de 10 amigos, ¿cuántas distribuciones de sus fechas de cumpleaños pueden darse al año?

Solución

Considerando que el año tiene 365 días y que puede darse el caso de que varias personas cumplan en la misma fecha, el número de maneras distintas es $VR_{365,10} = 365^{10}$.

P1.7] ¿Cuántas letras de 5 signos con 3 rayas y 2 puntos podría tener el alfabeto Morse?

Solución

Si se consideran como cinco símbolos diferentes entonces, dado que importa el orden en que se coloquen y que han de distribuirse en cinco posiciones, se tendrá un total de $P_5 = 5!$ posibles ordenaciones. Pero, dado que de los cinco elementos tan sólo hay dos diferentes (rayas y puntos) que se repiten 3 y 2 veces, respectivamente, dividiremos por las posibles permutaciones de cada uno de ellos, obteniendo así un total de $C_{5,3} = 5!/(3! \cdot 2!) = 5 \cdot 4/2 = 10$ letras. Nótese que éste es el número de posiciones (entre las cinco posibles) en que pueden ponerse las letras, y además coincide con el número de posiciones para los puntos ($C_{5,2}$).

P1.8] Cuando se arrojan simultáneamente 4 monedas,

1. ¿cuáles son los resultados posibles que se pueden obtener?
2. ¿cuántos casos hay en que salgan 2 caras y 2 cruces?

Solución

- Suponiendo que las monedas son iguales:
  1. Dado que un mismo resultado individual (cara o cruz) puede obtenerse en varias monedas a la vez, y que las monedas no pueden distinguirse entre sí, existen $CR_{2,4} = 5$ resultados posibles. Estos casos son: "4 caras y 0 cruces", "3 caras y 1 cruz", "2 caras y 2 cruces", "1 cara y 3 cruces", y "0 caras y 4 cruces".
  2. Como las monedas se arrojan simultáneamente, sólo habrá un caso posible con 2 caras y 2 cruces.
- Suponiendo que las monedas son distintas:
  1. En este caso, puesto que se distinguen las monedas entre sí y en una tirada pueden haber varias con el mismo resultado individual, hay un total de $VR_{2,4} = 2^4 = 16$ resultados posibles. Estos casos son: "cara, cara, cara, cara", "cara, cara, cara, cruz", "cara, cara, cruz, cara", "cara, cara, cruz, cruz", etc.
  2. Se calcula el número de combinaciones posibles de dos monedas distintas, que supondremos serán las de resultado "cara" (siendo así las dos restantes de resultado "cruz"), es decir, hay $C_{4,2} = 6$ resultados de dos caras y dos cruces.

P1.9] Cuatro libros de matemáticas, seis de física y dos de química han de ser colocados en una estantería ¿Cuántas colocaciones distintas admiten si:

1. los libros de cada materia han de estar juntos;

2. sólo los de matemáticas tienen que estar juntos?

Solución

- Supongamos que los libros de cada materia también son diferentes (de distintos autores).
  1. Consideramos cada conjunto de libros de una misma materia como una unidad. Entonces, hay $3! = 6$ ordenaciones posibles de las materias. Además hay que considerar también las $4! = 24$ permutaciones de los libros de matemáticas, así como las $6! = 720$ y las $2! = 2$ de los de física y química, respectivamente. Se concluye así que hay $3! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 2! = 207360$ colocaciones distintas.
  2. Consideremos los cuatro libros de matemáticas como una unidad. Se tendría entonces una unidad correspondiente a matemáticas, 6 unidades diferentes de física y dos unidades diferentes de química. Por lo tanto, existen $9! = 362880$ maneras de ordenar estas 9 unidades, y por cada una de ellas hay $4!$ ordenaciones posibles de los 4 libros de matemáticas, por lo que en total hay $9! \cdot 4! = 8709120$ formas de colocar los libros.
- Supongamos que los libros de cada materia son idénticos.
  1. Consideremos cada conjunto de libros de una misma materia como una unidad. Nótese que entonces se tendría un total de 3 unidades, que pueden ordenarse de $3! = 6$ formas distintas.
  2. En este caso tendremos una única unidad de matemáticas, además de 6 de física y 2 de química, que consideraremos diferentes para este cálculo inicial. Se tiene entonces un total de $9! = 362880$ ordenaciones posibles y, puesto que los libros de cada materia son indistinguibles, nótese que deben tenerse en cuenta las $6! \cdot 2! = 1440$ formas de colocar los libros de física y matemáticas. Por lo tanto, hay un total de $9!/(6! \cdot 2!) = 252$ ordenaciones.

P1.10] Un alumno tiene que elegir 7 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas maneras puede elegirlas? ¿Y si las 4 primeras son obligatorias?

Solución

El orden en que elija las preguntas, que además no podrán repetirse, es irrelevante. Así, puede elegir las preguntas de $C_{10,7} = 10 \cdot 9 \cdot 8/(3 \cdot 2) = 120$ maneras.

Por otra parte, si las 4 primeras son obligatorias, debe escoger 3 preguntas entre las 6 restantes para completar las 7 necesarias, resultando un total de $C_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4/(3 \cdot 2) = 20$ maneras.

P1.11] Con 7 consonantes y 5 vocales ¿cuántas palabras se pueden formar que tengan 4 consonantes distintas y 3 vocales distintas?

Solución

Podemos formar un total de $C_{7,4} = 35$ grupos de 4 consonantes distintas y $C_{5,3} = 10$ grupos de 3 vocales distintas. Por otra parte, para cada una de las $35 \cdot 10 = 350$ maneras de escoger 7 letras verificando las condiciones impuestas, hay $P_7 = 7! = 5040$ ordenaciones posibles de éstas. Se concluye así que el total de palabras que pueden formarse es $35 \cdot 10 \cdot 7! = 350 \cdot 5040 = 1764000$.

P1.12] Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes habrá que imprimir si cada billete lleva impresas las estaciones de origen y destino?

Solución

Dado que las estaciones de origen y destino no pueden coincidir, y además, dadas dos estaciones, es importante saber si corresponden al principio o al final del trayecto, hay un total de $V_{25,2} = 25 \cdot 24 = 600$ billetes diferentes.

P1.13] A partir de 5 matemáticos y 7 físicos hay que constituir una comisión de 2 matemáticos y 3 físicos. ¿De cuántas formas podrá hacerse si:

1. todos son elegibles;
2. un físico particular ha de estar en esa comisión;
3. dos matemáticos concretos no pueden estar juntos?

Solución

1. Puesto que todos son elegibles, existen $C_{5,2} = 10$ grupos de 2 matemáticos, y $C_{7,3} = 35$ grupos de 3 físicos. Luego hay un total de $10 \cdot 35 = 350$ comisiones posibles.
2. Se fija uno de los físicos, luego existen $C_{5,2} = 10$ grupos de 2 matemáticos, y $C_{6,2} = 15$ grupos de 3 físicos. Así, se pueden formar $10 \cdot 15 = 150$ comisiones.
3. Se excluye la única posibilidad de que el subgrupo de dos matemáticos lo constituyan los dos que no pueden estar juntos, por lo que hay $C_{5,2} - 1 = 9$ grupos de 2 matemáticos cumpliendo la condición. Además hay $C_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 / (3 \cdot 2) = 35$ grupos de 3 físicos, por lo que el total de comisiones que pueden formarse es $9 \cdot 35 = 315$.

P1.14] Tres atletas toman parte en una competición. ¿De cuántas maneras podrán llegar a la meta? (Pueden llegar juntos)

Solución

Hay varias posibilidades:

- Si llegan los tres juntos, entonces sólo hay 1 posibilidad.

- Si llegan dos juntos, existen $C_{3,2} = 3$ grupos de dos que llegan juntos, y $P_2 = 2$ ordenaciones distintas del grupo de dos y el otro atleta, por lo que existen $3 \cdot 2 = 6$ posibilidades.
- Si llegan los tres por separado, existen $3! = 6$ posibilidades.

Por lo tanto, pueden llegar a la meta de 13 maneras distintas.

P1.15] Se tienen n urnas diferentes. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar en ellas m ($n < m$) bolas idénticas:

1. sin restricción alguna en cuanto al número de bolas en cada urna;
2. si no puede haber ninguna urna vacía;
3. si quedan exactamente r ($0 < r \leq n$) urnas vacías?

Solución

Asumiendo que las urnas son distinguibles, plantear este problema es equivalente a calcular de cuántas maneras pueden distribuirse m estrellas ('$\star$ ') y $n-1$ barras ('$|$') entre dos barras fijas (puesto que los elementos de los extremos deben ser necesariamente barras).

Por ejemplo, si $n = 5$ y $m = 6$, una posible distribución puede representarse como:

$$\star| \quad |\star\star\star| \quad |\star\star$$

y significa que se coloca una bola en la primera urna, ninguna bola en la segunda, tres bolas en la tercera, ninguna en la cuarta y dos en la quinta.

1. Si todos los elementos fuesen distinguibles habría $(m+n-1)!$ permutaciones posibles de estos elementos. Sin embargo, dado que las barras son indistinguibles entre sí, así como las estrellas, el resultado es
$$CR_{n,m} = \binom{m+n-1}{n-1} = \frac{(m+n-1)!}{m! \cdot (n-1)!}.$$
2. En particular, si ninguna urna puede quedar vacía, fijamos n bolas, una en cada urna, por lo que el problema se reduce a distribuir $m-n$ bolas en n urnas. Aplicando lo anterior, se obtiene un total de
$$CR_{m-n,n} = \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-n)! \cdot (n-1)!}$$
distribuciones posibles.
3. Hay $C_{n,r}$ maneras distintas de escoger las r urnas que quedarán vacías. Por cada una de estas combinaciones, se fija una bola en cada una de las urnas que tendrán algún elemento, resultando así un total

de $CR_{n-r,m-r}$ formas de distribuir las $m-r$ bolas que quedan en las $n-r$ urnas restantes. Por lo tanto, hay:

$$C_{n,r} \cdot CR_{n-r,m-r} = \binom{n}{r} \cdot \binom{n+m-2r-1}{n-r-1}$$

maneras de distribuir las bolas.

Nótese que, en el caso de que las urnas no fueran distinguibles, el problema se complicaría y habría que recurrir a otros procedimientos.

P1.16] En un hospital se utilizan cinco símbolos para clasificar las historias clínicas de sus pacientes, de manera que los dos primeros son letras y los tres últimos son dígitos. Suponiendo que hay 25 letras, ¿cuántas historias clínicas podrán hacerse si:

1. no hay restricciones sobre letras y números;
2. las dos letras no pueden ser iguales?

Solución

1. Dado que es necesario tener en cuenta el orden de las dos letras escogidas y que además éstas pueden repetirse, resulta que hay $VR_{25,2} = 25^2 = 625$ posibilidades para las letras. Se procede análogamente con el caso de los dígitos y se obtiene un total de $VR_{10,3} = 10^3 = 1000$ posibilidades para los dígitos. El total de historias clínicas que pueden hacerse es, por lo tanto, $625 \cdot 1000 = 625000$.
2. Se procede de forma similar al caso anterior, con la única diferencia de que ahora las letras no pueden repetirse. Así, hay $V_{25,2} = 25 \cdot 24 = 600$ posibilidades para las letras, y $VR_{10,3} = 1000$ posibilidades para los dígitos, resultando que hay $600 \cdot 1000 = 600000$ historias clínicas.

P1.17] ¿De cuántas formas se pueden sentar siete personas en torno a una mesa redonda si:

1. no hay restricciones;
2. dos personas particulares no pueden sentarse juntas?

Solución

1. El número de permutaciones de las siete personas en la mesa es 7!. Sin embargo, se observa que, dada una de estas posibles distribuciones, si cada individuo se traslada al asiento situado a su derecha, por ejemplo, la posición relativa de todos los individuos será la misma. Por tanto, como no se hacen distinciones entre los asientos en la

mesa, debemos de dividir por el número de casos en que la posición relativa es la misma, es decir, por 7. Así, el número total de formas de sentarse es $7!/7 = 6! = 720$.

2. Consideremos a esas dos personas como una sola. Procediendo igual que en el apartado (a), se obtiene que hay $6!/6 = 5! = 120$ distribuciones. Además, hay $P_2 = 2! = 2$ posibles distribuciones de esas dos personas en particular. Por tanto, hay $120 \cdot 2 = 240$ formas de sentarse, estando juntas las dos personas particulares. Por otra parte, hay $6! = 720$ formas de sentarse, sin restricciones. Finalmente, se concluye que hay $720 - 240 = 480$ formas de sentarse.

P1.18] En la síntesis de proteínas hay una secuencia de tres nucleótidos sobre el ADN que decide cuál es el aminoácido a incorporar. Existen cuatro tipos distintos de nucleótidos según la base, que puede ser A (adenina), G (guanina), C (citosina) y T (timina). ¿Cuántas secuencias distintas se podrán formar si se pueden repetir nucleótidos?

Solución

Ya que importa el orden de los nucleótidos en la secuencia, y además éstos pueden repetirse, entonces existen $VR_{4,3} = 4^3 = 64$ secuencias distintas.

P1.19] ¿Cuántos ramilletes distintos se pueden formar con 5 flores de variedades distintas?

Solución

Pueden formarse ramilletes de 1, 2, 3, 4 ó 5 flores. Por tanto, dado que las flores de un ramillete no están ordenadas y además no se repiten, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{5} C_{5,i} = 2^5 - 1 = 31$$

ramilletes distintos.

P1.20] Suponiendo que hay 27 letras distintas, ¿cuántos conjuntos diferentes de iniciales pueden formarse si cada persona tiene un apellido y

1. exactamente dos nombres;
2. no más de dos nombres;
3. no más de tres nombres?

Solución

1. Si tiene dos nombres, hay $VR_{27,3} = 27^3 = 19683$ conjuntos de iniciales.
2. Si tiene dos nombres como máximo, hay dos posibilidades:

- del tipo "nombre apellido" hay $VR_{27,2} = 27^2$ posibilidades;
- del tipo "nombre1 nombre2 apellido" hay $VR_{27,3} = 27^3$ posibilidades.

Luego hay $27^2 \cdot (1 + 27) = 20412$ conjuntos de iniciales.

3. Si tiene tres nombres como máximo, a las dos posibilidades del apartado (b) hay que añadir el tipo "nombre1 nombre2 nombre3 apellido", del que hay $VR_{27,4} = 27^4$ posibilidades, obteniéndose finalmente un total de $27^2 \cdot \left(1 + 27 + 27^2\right) = 551853$ conjuntos de iniciales.

P1.21] Si se arrojan d dados y m monedas, ¿cuántos resultados diferentes se pueden distinguir?

Solución

- Suponiendo que los dados son distintos y las monedas son distintas:

  Para el caso de los d dados (un dado tiene 6 resultados posibles), puesto que se distinguen los dados entre sí, y en una tirada puede obtenerse el mismo resultado en varios dados, hay un total de $VR_{6,d} = 6^d$ resultados distintos para los dados.

  Procediendo de forma análoga para las m monedas, se obtienen $VR_{2,m} = 2^m$ resultados distintos para las monedas.

  Se concluye así que hay un total de $6^d \cdot 2^m$ resultados diferentes.

- Suponiendo que los dados son iguales y las monedas son iguales:

  El número de resultados que se pueden obtener al arrojar los d dados, teniendo en cuenta que éstos son indistinguibles y puede repetirse el mismo resultado en varios de ellos, es $CR_{6,d} = C_{6+d-1,d} = C_{d+5,d}$.

  Además, para las m monedas, hay un total de $CR_{2,m} = C_{2+m-1,m} = C_{m+1,m} = m + 1$ resultados.

  Por lo tanto, hay $C_{d+5,d} \cdot (m + 1)$ resultados diferentes.

CAPÍTULO 2

Fundamentos de probabilidades

Se llama *espacio muestral* Ω a un conjunto matemático donde cada elemento representa un resultado (concreto) de un experimento. Dado que es una imagen matemática (abstracta) de un problema (real) no es necesariamente único para un experimento dado, pudiendo por tanto existir diferentes espacios muestrales para un mismo problema.

A cada elemento del espacio muestral se le llama *suceso elemental* ya que se consideran como los resultados más simples que interesan de un experimento. Típicamente se desea estudiar características de algunos subconjuntos de sucesos elementales, que reciben el nombre de *sucesos*. Se dice que un suceso A *ocurre* cuando el resultado del experimento ω está asociado a uno de sus sucesos elementales, es decir, $\omega \in A$.

Para garantizar rigor en el uso de operaciones algebraicas como la unión y la intersección de conjuntos, la familia de sucesos se extiende con algunos otros subconjuntos (complementos, etc.) de manera que la familia extendida $\mathcal{A}$ tenga la siguiente propiedad de *álgebra*:

- $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$;
- $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ entonces $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$;
- $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Sobre una pareja $(\Omega, \mathcal{A})$ se define una *probabilidad* como una función

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$

con las siguientes propiedades:

- $P(\Omega) = 1$;
- si $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$: $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ entonces $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

A la terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se le llama *espacio probabilístico*.

Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con $\Omega \subset \mathcal{A}$, el espacio muestral Ω se llama *equiprobable* cuando la probabilidad de todos sus sucesos elementales es la misma.

Una importante característica de los espacios muestrales equiprobables es que la probabilidad de cualquier suceso suyo se calcula determinando la proporción de sus elementos sobre el total. Intuitivamente:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos posibles de } \Omega}.$$

Cuando Ω sea un conjunto finito esta última idea consiste en un cálculo de cardinales ya que:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Dados dos sucesos A y B de un mismo espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con $P(B) > 0$, se llama *probabilidad condicionada* de A dado B a la probabilidad de que ocurra un suceso elemental en A supuesto que ha ocurrido algún suceso elemental de B. Se representa por $P(A \mid B)$, y sucede que:

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Se dice que A y B son *independientes* si, y sólo si, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Ejercicios Resueltos

P2.1] Describir el espacio muestral para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

1. 250 personas son seleccionadas en La Laguna y se les pregunta si van a votar al candidato A o al B.
2. Un dado es lanzado cinco veces consecutivas.
3. Cinco dados son lanzados simultáneamente.
4. Una moneda es lanzada hasta que salen dos *caras* o dos *cruces* consecutivas.
5. Cuatro objetos se envasan en paquetes de dos.

6. Cuatro bolas son extraídas aleatoriamente y sin reeplazamiento de una urna que contiene ocho bolas blancas y seis azules.

Solución

1. Si w_i representa la opción del i-ésimo encuestado $(i = 1, \ldots, 250)$ entonces un posible espacio muestral es

$$\begin{aligned} \Omega &= \{w = (w_1, w_2, \ldots, w_{250}) : w_i \in \{A, B\}, i = 1, \ldots, 250\} = \\ &= \{(A, A, \ldots, A), (A, B, A, \ldots, A), \ldots, (B, B, B, \ldots, B)\}. \end{aligned}$$

   Si no interesa conocer lo que vota cada persona, otro espacio muestral válido sería:

$$\Omega' = \{0, 1, 2, \ldots, 250\},$$

   donde cada suceso elemental representa el número de encuestados que optan por el candidato A.

2. Representando por w_i el resultado del i-ésimo lanzamiento del dado $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, podemos definir el espacio muestral como

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) : w_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

3. Los dados se lanzan de forma simultánea, por lo que de cada lanzamiento tendremos en cuenta tan sólo el número de veces que ha salido cada cara. Así, un posible espacio muestral es:

$$\Omega = \left\{ w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) : w_i \in \{0, 1, \ldots, 5\}, \sum_{i=1}^{6} w_i = 5 \right\}$$

   donde cada w_i representa el número de veces que sale el número i en un lanzamiento $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

4. Representando por w_1 el número de lanzamientos hasta conseguir dos caras o dos cruces consecutivas, y por w_2 el resultado de los dos últimos lanzamientos, podemos definir como espacio muestral:

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2) : \ w_1 \in \{2, 3, \ldots\}, w_2 \in \{C, X\}\}.$$

5. Hay 4 objetos, que representaremos por A, B, C y D, y se envasan en dos paquetes de dos objetos cada uno. Por lo tanto, desde que se conozca la composición de un paquete ya se conoce la del otro. Además, elegido un objeto (por ejemplo, A) basta saber quién va con él en el paquete. Teniendo esto en cuenta, podemos definir como espacio muestral para este experimento:

$$\Omega = \{B, C, D\}.$$

6. Si representamos por w_i el color de la bola de la i-ésima extracción $(i = 1, 2, 3, 4)$, siendo $B =$"blanco" y $A =$"azul" los dos posibles colores a obtener, un posible espacio muestral es

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, w_3, w_4) : w_i \in \{B, A\}, i = 1, 2, 3, 4\}.$$

P2.2] Una moneda es lanzada cinco veces. Definir espacios muestrales diferentes de acuerdo a los siguientes objetivos:

1. Sólo el número de caras es de interés.
2. El resultado de cada lanzamiento individual es de interés.
3. Mostrar que cualquier espacio muestral satisfactorio para (2) puede ser también usado en (1), pero que la afirmación recíproca no es cierta.

Solución

1. Representamos cada suceso elemental como $w =$"número de caras obtenidas en los cinco lanzamientos". Así, un posible espacio muestral es:
$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$
2. Un posible espacio muestral es:
$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) : w_i \in \{C, X\}\},$$
donde cada w_i representa el resultado del i-ésimo lanzamiento de la moneda, que puede ser $C =$"cara" y $X =$"cruz" $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.
3. Si tomamos un suceso del espacio muestral del apartado (b) podemos calcular el número de caras que han salido (espacio muestral del apartado (a)). Sin embargo, a partir del número de caras que se han obtenido en cinco lanzamientos no podemos saber el resultado de cada lanzamiento individual.

P2.3] Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico, demostrar:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. si $A, B \in \mathcal{A}$: $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$;
3. si $A \in \mathcal{A}$: $P(A^c) = 1 - P(A)$;
4. si $A, B \in \mathcal{A}$: $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$;
5. si $A, B \in \mathcal{A}$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Solución:

1. Basta tener presente las dos condiciones que cumple P por definición, considerando $A_1 := \Omega$ y $A_2 := \emptyset$.
2. Basta tener presente las dos condiciones que cumple P por definición, considerando $A_1 := A \cap B = A$ y $A_2 := B \setminus A$.
3. Basta tener presente las dos condiciones que cumple P por definición, considerando $A_1 := A$ y $A_2 := A^c$.
4. Basta tener presente las dos condiciones que cumple P por definición, considerando $A_1 := A \setminus B$ y $A_2 := A \cap B$.
5. Usando los apartados anteriores: $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

P2.4] Un jugador italiano expresó su sorpresa a Galileo, por observar que al jugar con 3 dados la suma 10 aparece con más frecuencia que la 9. Según el jugador los casos favorables al 9 serían: 126, 135, 144, 225, 234 y 333; y al 10: 136, 145, 226, 235, 244 y 334. Pero Galileo vio que estas combinaciones no se pueden considerar igualmente probables. Explicar por qué y calcular las correspondientes probabilidades.

Solución

Consideremos como espacio muestral:

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, w_3) : w_i \in \{1,2,3,4,5,6\}, i = 1,2,3\},$$

donde cada w_i representa el resultado del lanzamiento del $i-$ ésimo dado $(i = 1,2,3)$. Nótese que este espacio es equiprobable y $|\Omega| = 6^3$.

La probabilidad de obtener resultados que sumen nueve es:

$$\begin{aligned} & 3! \cdot [P(\{(1,2,6)\}) + P(\{(1,3,5)\}) + P(\{(2,3,4)\})] \\ + & \binom{3}{2} \cdot [P(\{(1,4,4)\}) + P(\{(2,2,5)\})] + P(\{(3,3,3)\}) \\ & = \frac{1}{6^3} \cdot \left[6 \cdot 3 + \binom{3}{2} \cdot 2 + 1\right] = \frac{25}{216}. \end{aligned}$$

Por otra parte, la probabilidad en el caso de que la suma sea igual a diez es:

$$\begin{aligned} & 3! \cdot [P(\{(1,3,6)\}) + P(\{(1,4,5)\}) + P(\{(2,3,5)\})] \\ + & \binom{3}{2} \cdot [P(\{(2,2,6)\}) + P(\{(2,4,4)\}) + P(\{(3,3,4)\})] \\ & = \frac{1}{6^3} \cdot \left[6 \cdot 3 + \binom{3}{2} \cdot 3\right] = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

que es mayor que 25/216.

P2.5] Considérese un espacio muestral Ω formado por las 24 permutaciones de los números 1, 2, 3 y 4, todas equiprobables. Definimos $A_i = \{w \in \Omega /$en w aparece el número i en el lugar i-ésimo$\}$. Calcular:

1. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$
2. $P((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4))$
3. $P(A_1 \cup A_3)$
4. $P(A_1 \cup (A_3 \cap A_4))$

Solución

1. Dado que

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \sum_{1 \leq i \leq 4} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4), \end{aligned}$$

procedemos a calcular cada uno de los términos:

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(4-1)!}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}, \\ &\quad \text{para todo } i = 1, \ldots, 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_i \cap A_j) &= \frac{|A_i \cap A_j|}{|\Omega|} = \frac{(4-2)!}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}, \\ &\quad \text{para todo } i, j = 1, \ldots, 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \frac{|A_i \cap A_j \cap A_k|}{|\Omega|} = \frac{1}{24}, \\ &\quad \text{para todo } i, j, k = 1, \ldots, 4 \end{aligned}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|}{|\Omega|} = \frac{1}{24}.$$

Luego, fijados por ejemplo $A_i = A_1, A_j = A_2, A_k = A_3$, se tiene que la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \binom{4}{1} \cdot P(A_{i_0}) - \binom{4}{2} \cdot P(A_{i_0} \cap A_{j_0}) \\ &+ \binom{4}{3} \cdot P(A_{i_0} \cap A_{j_0} \cap A_{k_0}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\binom{4}{4} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
= \; & 4 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{24} - 1 \cdot \frac{1}{24} = \frac{5}{8}.
\end{aligned}
$$

2. Utilizando lo ya conocido para la probabilidad de la unión de dos sucesos, se obtiene el resultado:

$$
\begin{aligned}
P((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4)) &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3 \cup A_4) \\
&\quad - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\
&= \{P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)\} \\
&\quad + \{P(A_3) + P(A_4) - P(A_3 \cap A_4)\} \\
&\quad - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \\
&= 1 - 2 \cdot \frac{1}{12} - \frac{15}{24} = \frac{24 - 4 - 15}{24} = \frac{5}{24}.
\end{aligned}
$$

3. Utilizando la propiedad de la probabilidad de la unión de dos sucesos se obtiene:

$$
P(A_1 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_3) = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.
$$

4. Análogamente, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup (A_3 \cap A_4)) &= P(A_1) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}.
\end{aligned}
$$

P2.6] Sean A_1, A_2 y A_3 sucesos tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ y $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3$. Sabiendo que $P(A_1) = 1/4$ y $P(A_2) = 1/2$ hallar $P(A_3)$.

Solución

Sabemos que $P(\Omega) = 1$, y además podemos expresar esta probabilidad en función de los tres sucesos que se definen en el enunciado. Así, desarrollando esta expresión y sustituyendo los datos que nos da el problema, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
P(\Omega) &= 1 = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\
&\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\
&\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + P(A_3) - 2 \cdot P(A_1 \cap A_2),
\end{aligned}
$$

usando, para la última igualdad, que:

$$
P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) = P(A_1 \cap (A_1 \cap A_2)) = P(A_1 \cap A_2).
$$

Finalmente, despejando, obtenemos:

$$P(A_3) = 2 \cdot P(A_1 \cap A_2) + \frac{1}{4}.$$

P2.7] Tres caballos A, B y C participan en una carrera. El suceso "A vence a B" se designa por AB, el suceso "A vence a B, el cual vence a C" como ABC, y así sucesivamente. Se sabe que $P(AB) = 2/3$, $P(AC) = 2/3$ y $P(BC) = 1/2$. Además $P(ABC) = P(ACB)$, $P(BAC) = P(BCA)$ y $P(CAB) = P(CBA)$. Calcular $P(A \text{ venza})$, $P(B \text{ venza})$, $P(C \text{ venza})$. ¿Son AB, AC y CB independientes?

Solución

En este problema se asume que no existen los empates. Por ello, los sucesos elementales son las permutaciones de las letras A, B y C, y un simple espacio muestral es:

$$\Omega = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}\,; |\Omega| = 3! = 6$$

Dicho espacio tiene $|\Omega| = 3! = 6$ elementos, pero no es necesariamente equiprobable. Además:

$$\begin{aligned} AB &= \{ABC, ACB, CAB\} \\ AC &= \{ABC, ACB, BAC\} \\ BC &= \{ABC, BAC, BCA\}\,. \end{aligned}$$

Denotemos las probabilidades de los sucesos elementales:

$$P(\{ABC\}) = P(\{ACB\}) = p_1, P(\{BAC\}) = P(\{BCA\}) = p_2,$$
$$P(\{CAB\}) = P(\{CBA\}) = p_3.$$

y resolvamos:

$$\left.\begin{array}{l} P(AB) = 2/3 \Rightarrow 2 \cdot p_1 + p_3 = 2/3 \\ P(AC) = 2/3 \Rightarrow 2 \cdot p_1 + p_2 = 2/3 \\ P(BC) = 1/2 \Rightarrow p_1 + 2 \cdot p_2 = 1/2 \end{array}\right\}$$

Se obtiene así que $p_1 = 5/18, p_2 = 1/9$ y $p_3 = 1/9$. Por tanto, las probabilidades que pide el problema son:

$$\begin{aligned} P(A \text{ venza}) &= P(\{ABC\}) + P(\{ACB\}) = 2 \cdot p_1 = 5/9 \\ P(B \text{ venza}) &= P(\{BAC\}) + P(\{BCA\}) = 2 \cdot p_2 = 2/9 \\ P(C \text{ venza}) &= P(\{CAB\}) + P(\{CBA\}) = 2 \cdot p_3 = 2/9. \end{aligned}$$

Por último, para ver si AB, AC y CB son independientes, calculemos:

$$P(AB \cap AC) = P\left(\{ABC, ACB\}\right) = P\left(\{ABC\}\right) + P\left(\{ACB\}\right) = \frac{5}{9}$$

$$P(AB) \cdot P(AC) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Dado que $P(AB \cap AC) \neq P(AB) \cdot P(AC)$, se concluye que no son independientes.

P2.8] Siendo A, B y C tres sucesos pertenecientes a un determinado espacio muestral, se consideran los dos sucesos $M = A \cap B^c \cap C^c$ y $N = A \cap (B \cup C)$. Calcular las probabilidades de M y N sabiendo que $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}6$, $P(C) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}45$, $P(A \cap C) = 0{,}35$, $P(B \cap C) = 0{,}25$ y $P(A \cap B \cap C) = 0{,}15$.

Solución

- Se puede usar la diferencia de sucesos, y así:

$$\begin{aligned}
P(M) &= P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A \cap (B \cup C)^c) \\
&= P\left(A | (B \cup C)\right) = P(A) - P\left(A \cap (B \cup C)\right) \\
&= P(A) - P\left((A \cap B) \cup (A \cap C)\right) \\
&= P(A) - P\left(A \cap B\right) - P\left(A \cap C\right) + P\left((A \cap B) \cap (A \cap C)\right) \\
&= 0{,}7 - 0{,}45 - 0{,}35 + 0{,}15 = 0{,}05.
\end{aligned}$$

Otro modo de calcular $P(M)$ consiste en usar la expresión equivalente a la unión de los sucesos A, B y C:

$$A \cup B \cup C = (A \cap (B \cup C)^c) \cup B \cup C = (A \cap B^c \cap C^c) \cup B \cup C.$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
P\left(A \cup B \cup C\right) &= P((A \cap B^c \cap C^c) \cup B \cup C) \\
&= P(A \cap B^c \cap C^c) + P(B) + P(C) \\
&\quad -P(A \cap B^c \cap C^c \cap B) - P(A \cap B^c \cap C^c \cap C) \\
&\quad -P(B \cap C) + P((A \cap B^c \cap C^c) \cap B \cap C),
\end{aligned}$$

siendo

$$A \cap B^c \cap C^c \cap B = A \cap B^c \cap C^c \cap C = \emptyset$$

y

$$(A \cap B^c \cap C^c) \cap (B \cup C) = (A \cap B^c \cap C^c \cap B) \cup (A \cap B^c \cap C^c \cap C) = \emptyset.$$

Por tanto:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cap B^c \cap C^c) + P(B) + P(C) - P(B \cap C). \quad (1)$$

Hemos logrado expresar la probabilidad pedida en función de las probabilidades conocidas $P(B), P(C), P(B \cap C)$ y $P(A \cup B \cup C)$, siendo el valor de esta última:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ &\quad - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \\ &= 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}45 - 0{,}35 - 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}9 \end{aligned}$$

Finalmente, despejamos en 2.1 el resultado:

$$P(M) = P(A \cap B^c \cap C^c) = 0{,}05$$

- Para calcular $P(N)$, expresamos N como unión de sucesos disjuntos, utilizando la diferencia de sucesos:

$$\begin{aligned} P(N) &= P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup ((A \cap C) \,|\, (A \cap B \cap C))) \\ &= P(A \cap B) + P((A \cap C) \,|\, (A \cap B \cap C)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap C) \cap (A \cap B \cap C)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= 0{,}45 + 0{,}35 - 0{,}15 = 0{,}65, \end{aligned}$$

verificándose la tercera igualdad debido a que los sucesos $A \cap B$ y $(A \cap C) \,|\, (A \cap B \cap C)$ son disjuntos.

Otra forma de obtener la probabilidad pedida sería, directamente:

$$\begin{aligned} P(N) &= P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

P2.9] Siendo A_1, A_2 y B tres sucesos tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, demostrar que $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$.

Solución

Aplicamos la definición de probabilidad condicionada y se obtiene:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 | B) &= \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) - P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\ &= P(A_1|B) + P(A_2|B). \end{aligned}$$

La tercera igualdad se verifica debido a que $P(A_1 \cap A_2 \cap B) = P(\emptyset \cap B) = P(\emptyset) = 0$.

P2.10] Demostrar que si A_1, A_2 y A_3 son independientes, entonces también lo son A_1^c, A_2^c y A_3^c. Y que si A_1, A_2 y A_3 son independientes, entonces son independientes por pares, pero que lo recíproco no es cierto.

Solución

- "Si A_1, A_2 y A_3 son independientes, entonces A_1^c, A_2^c y A_3^c son independientes".

  Supongamos A_1, A_2 y A_3 independientes. Esto quiere decir que:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2) \cdot P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \end{aligned}$$

  Veamos que esto se verifica también para A_1^c, A_2^c y A_3^c, pues:

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cap A_2^c) &= P((A_1 \cup A_2)^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = \\ &= 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1 \cap A_2) = \\ &= 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) = \\ &= (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c). \end{aligned}$$

  Análogamente:

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cap A_3^c) &= P(A_1^c) \cdot P(A_3^c) \\ P(A_2^c \cap A_3^c) &= P(A_2^c) \cdot P(A_3^c). \end{aligned}$$

  Por último, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) &= P((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= 1 - \sum_{1 \leq i \leq 3} P(A_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} P(A_i \cap A_j) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 1 - \sum_{1 \leq i \leq 3} P(A_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} P(A_i) \cdot P(A_j) \\ &\quad - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \\ &= P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c). \end{aligned}$$

- "Si A_1, A_2 y A_3 son independientes, entonces son independientes por pares".

  El resultado es consecuencia de la definición.

- "Si A_1, A_2 y A_3 son independientes por pares, esto no implica que necesariamente sean independientes".

  Supongamos que se realiza un experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados distinguibles (1 y 2). Un espacio muestral es

$$\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\},$$

donde i representa el resultado del dado 1 y j el resultado del dado 2 $(i,j = 1,2,3,4,5,6)$. Este espacio es equiprobable, y su cardinal es $|\Omega| = 6^2 = 36$. Por tanto,

$$P((i,j)) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}, \quad \text{para todo } i,j = 1,2,3,4,5,6.$$

Definamos los sucesos:

$$\begin{aligned} A &= \text{"El resultado del dado 1 es un n}^o\text{ par"}, \\ B &= \text{"El resultado del dado 2 es un n}^o\text{ par"}, \\ C &= \text{"Los dos dados dan el mismo resultado"}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} P(B) = \frac{1}{2} P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Son independientes por pares ya que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B), \\ P(A \cap C) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(A) \cdot P(C), \\ P(B \cap C) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(B) \cdot P(C), \end{aligned}$$

pero, sin embargo, no se cumple la última condición para la independencia, ya que las probabilidades:

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= \frac{6 \cdot 3}{36} = \frac{1}{12}, \\ P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

son diferentes:

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

P2.11] Sea A_1 y A_2 dos sucesos con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dar una condición necesaria y suficiente para que A_1 y A_2 sean independientes.

Solución

$$\begin{aligned} A_1, A_2 \text{ independientes} \quad &\Leftrightarrow \quad P(A_1) \cdot P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) = P(\emptyset) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad P(A_1) = 0 \text{ ó } P(A_2) = 0 \end{aligned}$$

P2.12] Dado que $P(A) = 1/3$, $P(B|A) = 1/3$; determinar si se cumple que:

1. A y B son independientes.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. $A \subseteq B$.
4. $P(A^c|B^c) = 2/3$.

Solución

1. Supongamos que se realiza un experimento aleatorio que consiste en extraer una bola de una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Entonces, un espacio muestral es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Dicho espacio es equiprobable y $P(\{i\}) = 1/9$, para todo $i = 1, \ldots, 9$.

Definimos A como el suceso "el número extraído es menor que cuatro", es decir, $A = \{1, 2, 3\}$, y sea B el suceso "el número extraído es mayor que dos", es decir, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{7}{9} \\ P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{3\})}{1/3} = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$P(B) \neq P(B|A)$, por lo que se concluye que los dos sucesos no son independientes.

2. Por definición de probabilidad condicionada, se tiene que:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{1/3} = 1/3,$$

obteniéndose así que $P(B \cap A) = 1/9$. Por lo tanto, $A \cap B \neq \emptyset$.

3. En el mismo contraejemplo utilizado en el primer apartado del problema se observa que $A \not\subseteq B$.

4. Obsérvese, en el contraejemplo del apartado (a), que:

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(\emptyset)}{P(\{1,2\})} = 0.$$

P2.13] ¿Son ciertas las igualdades:

1. $P(A|B) = P(A^c|B^c)$;
2. $P(A|B) + P(A^c|B^c) = 1$;
3. $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$?

Solución

1. Para ver que la igualdad $P(A|B) = P(A^c|B^c)$ es falsa, definimos un espacio muestral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, con $P(\{i\}) = 1/6$, para todo $i = 1,\ldots,6$, pudiendo pensarse que cada suceso elemental i se corresponde con la cara que sale al lanzar un dado. Definimos también los sucesos $A = \{1,2\}$ y $B = \{3,4\}$, que verifican:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \emptyset, \\ B^c &= \{1,2,5,6\}, \\ A^c \cap B^c = (A \cup B)^c &= \{5,6\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en las correspondientes expresiones, se obtiene:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0 \\ P(A^c|B^c) &= \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \\ &= \frac{P(\{5,6\})}{P(\{1,2,5,6\})} = \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Luego la igualdad $P(A|B) = P(A^c|B^c)$ no es cierta.

2. La igualdad $P(A|B) + P(A^c|B^c) = 1$ tampoco se verifica, pues, si utilizamos los datos del ejemplo del apartado anterior, resulta:

$$P(A|B) + P(A^c|B^c) = 0 + 1/2 = 1/2 \neq 1.$$

3. La igualdad $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$ no es cierta, pues, utilizando nuevamente el ejemplo del primer apartado, se obtiene:

$$A \cap B^c = \{1,2\},$$

y sustituyendo:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= 0 \\ P(A|B^c) &= \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(\{1,2\})}{P(\{1,2,5,6\})} \\ &= \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Luego

$$P(A|B) + P(A|B^c) = 0 + 1/2 = 1/2 \neq 1.$$

P2.14] Demostrar que si dos sucesos A y B son independientes, entonces A^c y B^c son independientes.

Solución

Comprobemos que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ implica que $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$. En efecto,

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ &= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = P(A^c) \cdot P(B^c), \end{aligned}$$

concluyéndose así que A^c y B^c son independientes.

P2.15] Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 1/4$, $P(B|A) = 1/2$ y $P(A|B) = 1/4$. Decir si son ciertas o falsas las siguientes relaciones:

1. $A \subset B$;
2. A y B son independientes;
3. A^c y B^c son independientes;
4. A y B son incompatibles;
5. $P(A^c|B^c) = 1/2$;
6. $P(A|B) + P(A^c|B^c) = 1$.

Solución

1. Nótese que si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$, y se verificaría:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \neq \frac{1}{2},$$

por lo que no es posible que $A \subset B$.

2. Es cierto. En efecto, A y B son independientes, pues:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

y

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Luego $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

3. Habiendo demostrado ya la independencia de A y B, y teniendo en cuenta el ejercicio 14, se concluye que A^c y B^c son independientes.

4. No es cierto que A y B sean incompatibles, ya que:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq 0.$$

5. Tampoco se cumple que $P(A^c|B^c) = 1/2$, pues:

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A^c) \cdot P(B^c)}{P(B^c)} = \frac{3}{4}.$$

6. Se verifica que $P(A|B) + P(A^c|B^c) = 1$. En efecto,

$$P(A|B) + P(A^c|B^c) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

P2.16] Demostrar los siguientes resultados: Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico, un subconjunto de sucesos $A_1, \ldots, A_k$ disjuntos dos a dos, y otro suceso B tal que $B \subseteq \cup_{i=1}^k A_i$;

1. Teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i).$$

2. Teorema de Bayes: para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^k P(B|A_i)P(A_i)}.$$

Solución:

1. Dado que B es la unión disjunta de los conjuntos $B \cap A_i$, el resultado es trivial.

2. Consecuencia inmediata de aplicar la definición de probabilidad condicionada y del apartado anterior.

P2.17] Supuesto que los sucesos A_1, A_2 y A_3 son independientes y asumiendo que $r = 0, 1, 2, 3$, obtener expresiones en términos de $P(A_1)$, $P(A_2)$ y $P(A_3)$ para las probabilidades de los sucesos:

1. ocurren exactamente r sucesos;
2. al menos ocurren r sucesos;
3. como máximo ocurren r sucesos.

Solución

1. Veamos la probabilidad de que ocurran exactamente r sucesos para cada valor de r:
   - Si $r = 0$, por el ejercicio 10: "Si A_1, A_2 y A_3 son independientes, entonces A_1^c, A_2^c y A_3^c son independientes", luego
   $$\begin{aligned} P\left(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c\right) &= P\left(A_1^c\right) \cdot P\left(A_2^c\right) \cdot P\left(A_3^c\right) = \\ &= \left(1 - P\left(A_1\right)\right) \cdot \left(1 - P\left(A_2\right)\right) \cdot \left(1 - P\left(A_3\right)\right). \end{aligned}$$
   - Si $r = 1$ entonces
   $$\begin{aligned} &P\left(\left(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c\right) \cup \left(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c\right) \cup \left(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3\right)\right) \\ &= P\left(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c\right) + P\left(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c\right) + P\left(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3\right). \end{aligned}$$
   Esta igualdad se verifica porque los sucesos son disjuntos. Además, por el ejercicio P2.8:
   $$\begin{aligned} P\left(A_i \cap A_j^c \cap A_k^c\right) &= P(A_i) - P\left(A_i \cap A_j\right) - P\left(A_i \cap A_k\right) \\ &\quad + P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) \\ &= P(A_i) - P\left(A_i\right) \cdot P\left(A_j\right) - P\left(A_i\right) \cdot P\left(A_k\right) \\ &\quad + P\left(A_i\right) \cdot P\left(A_j\right) \cdot P\left(A_k\right), \end{aligned}$$
   $$\text{para todo } i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j, i \neq k, j \neq k.$$
   Continuando con las igualdades anteriores
   $$\sum_{i=1}^{3} P\left(A_i\right) - 2 \cdot \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{3} \left(P\left(A_i\right) \cdot P\left(A_j\right)\right) + 3 \cdot P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdot P\left(A_3\right),$$
   que está expresado en términos de las probabilidades pedidas.
   - Si $r = 2$, entonces:
   $$\begin{aligned} &P\left(\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c\right) \cup \left(A_1 \cap A_2^c \cap A_3\right) \cup \left(A_1^c \cap A_2 \cap A_3\right)\right) = \\ &= P\left(\left(A_1 \cap A_2\right) \cap A_3^c\right) + P\left(\left(A_1 \cap A_3\right) \cap A_2^c\right) + P\left(A_1^c \cap \left(A_2 \cap A_3\right)\right) \\ &= P\left(A_1 \cap A_2\right) - P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) + P\left(A_1 \cap A_3\right) \\ &\quad - P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) + P\left(A_2 \cap A_3\right) - P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right), \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se verifica por ser sucesos disjuntos. Además, por el ejercicio 10: "Si A_1, A_2 y A_3 son independientes, entonces A_1, A_2 y A_3 son independientes por pares", luego, el último término de esta última expresión es equivalente a:

$$P(A_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_3) + P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$-3 \cdot P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

- Si $r = 3$, se tiene que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

por ser sucesos independientes.

2. La probabilidad de que ocurran al menos r sucesos es:

- Si $r = 0$, esta probabilidad es $P(\Omega) = 1$.
- Si $r = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = \\ &= 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot (1 - P(A_3)). \end{aligned}$$

- Si $r = 2$, tenemos

$$\begin{aligned} &P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) \\ &\quad -2 \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_3) + P(A_2) \cdot P(A_3) \\ &\quad -2 \cdot P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se verifica por ser A_1, A_2 y A_3 sucesos independientes.
- Si $r = 3$, la probabilidad es:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

verificándose esta igualdad por ser A_1, A_2 y A_3 sucesos independientes.

3. Calculemos la probabilidad de que al máximo ocurran r sucesos.

- Si $r = 0$, se tiene que

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot (1 - P(A_3)).$$

- Si $r = 1$, entonces

$$\begin{aligned} &1 - P\left((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)\right) \\ &= 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_3) - P(A_2) \cdot P(A_3) \\ &\quad +2 \cdot P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3), \end{aligned}$$

  por ser A_1, A_2 y A_3 sucesos independientes.
- Si $r = 2$, la probabilidad que nos interesa obtener es

$$1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

  por ser A_1, A_2 y A_3 sucesos independientes.
- Si $r = 3$, el resultado es $P(\Omega) = 1$.

P2.18] *Dilema del concurso televisivo.* En un concurso de televisión se le ofrece al concursante la posibilidad de elegir una entre 3 puertas (A, B, C) para quedarse lo que hay tras ella. El presentador le informa de que sólo una de ellas tiene un buen regalo (un apartamento en Torrevieja, Alicante), mientras que las otras dos están vacías. El concursante opta por una y tras decirlo, el presentador (que conoce exactamente dónde está el regalo) le abre una de las otras dos puertas no elegidas por el concursante donde no está el regalo. Luego le ofrece al concursante la opción de cambiar su decisión inicial eligiendo la otra puerta aún no abierta. ¿Qué debe hacer el concursante? Es decir, ¿debe el concursante aceptar la nueva posibilidad cambiando la puerta que eligió originalmente, o no?

Solución

En el momento original donde el concursante debe tomar su primera decisión, es evidente que la probabilidad de que escoja la puerta tras la que se oculta el regalo es igual a $1/3$. Supuesto que opta por una, se encuentra con que el presentador le ofrece una nueva información: le reduce las tres posibilidades iniciales a dos. Esto cambia por tanto las probabilidades, ya que la puerta abierta por el presentador pasa a tener probabilidad 0, mientras que las otras dos se reparten el $1/3$ que esa puerta pierde. Pero, ¿de qué manera? Desde luego, no equitativamente, puesto que la puerta elegida por el concursante sigue teniendo probabilidad $1/3$ y la otra que no abrió el presentador pasa a tener probabilidad $2/3$.

Por tanto, el concursante sí debería cambiar su elección original, ya que con ello duplica la probabilidad de obtener el regalo. Obviamente, este consejo se basa únicamente en consideraciones matemáticas y no tiene presente de ninguna forma la afición o aversión al riesgo del concursante.

P2.19] *Dilema del prisionero.* En una cárcel hay 3 prisioneros (A, B, C) con historiales similares. En un momento dado, los tres solicitan el indulto a un tribunal, y sin conocerse más detalles llega la información al prisionero A de que han concedido el indulto a 2 de los 3 prisioneros. El prisionero A conoce a uno de los miembros del tribunal y puede intentar hacerle una pregunta para obtener algo de información. Sabe que no puede preguntar si él es uno de los dos indultados, pero sí puede pedir que le den el nombre de uno de los otros dos (nunca él) que esté indultado. Pensando un poco concluye que si no hace tal pregunta, entonces la probabilidad de ser uno de los dos indultados es 2/3, mientras que si la hace obtendrá respuesta y entonces la probabilidad de ser el otro indultado es 1/2. Por ello, concluye que es mejor no hacer tal pregunta, porque sea cual sea la respuesta, sólo le servirá para disminuir la probabilidad de ser uno de los dos indultados. ¿Dónde está el error de su razonamiento?

Solución

Si no hace la pregunta, entonces un espacio muestral es

$$\Omega = \{w = \{w_1, w_2\} : w_i \in \{A, B, C\}, w_1 \neq w_2\} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\},$$

que es un espacio equiprobable. Dado que el suceso "A es indultado" coincide con $\{\{A, B\}, \{A, C\}\}$, entonces su probabilidad es 2/3, y por tanto ese cálculo del prisionero es correcto.

Sin embargo, si hace la pregunta, un espacio muestral sería

$$\Omega' = \{w = (\{w_1, w_2\}, w_3) : w_i \in \{A, B, C\}, w_1 \neq w_2, w_3 \in \{w_1, w_2\} \setminus \{A\}\},$$

donde w_1 y w_2 representan los dos presos indultados, y w_3 es el nombre de uno de los indultados que el miembro del tribunal da al preso A. Nótese que:

$$P((\{A, B\}, B)) = P((\{A, C\}, C)) = \frac{1}{3},$$
$$P((\{B, C\}, B)) = P((\{B, C\}, C)) = \frac{1}{6},$$

donde se asume que A no es indultado con probabilidad 1/3 y en tal caso la respuesta puede ser B ó C con igual probabilidad. En consecuencia el suceso "A es indultado" coincide con $\{(\{A, B\}, B), (\{A, C\}, C)\}$ y por tanto la probabilidad sigue siendo 2/3. Aquí está su error. En efecto, era de esperar que conocer la respuesta a su pregunta no le diera información sobre la probabilidad de que él mismo fuera indultado, debido al propio enunciado de la pregunta.

P2.20] Supongamos que entramos en un casino con 20 euros y desearíamos salir con 40 euros. Se nos ofrecen dos posibilidades para aumentar el capital en una ruleta:

1. apostar los 20 euros sobre "pares" en una única jugada;
2. apostar un euro sobre "pares" en cada jugada durante una secuencia de jugadas hasta que pierda sus 20 euros o gane lo deseado.

Analizar matemáticamente ambas alternativas.

Solución

Recurriendo a la primera opción, propia de jugadores más arriesgados, hay una probabilidad de ganar igual a $18/38 \cong 0{,}474$.

Sin embargo, con la segunda opción, propia de jugadores más cautelosos, la probabilidad de ganar es:

$$\frac{\left(\frac{20}{18}\right)^{20} - 1}{\left(\frac{20}{18}\right)^{40} - 1} = 0.\,1084.$$

Es decir, con la segunda opción tiene un 25 % menos de posibilidades de ganar que con la primera opción.

P2.21] ¿Cuál es el mínimo número de alumnos que debe tener una clase para garantizar una probabilidad 0.5 de que el día de cumpleaños de algún alumno coincida con el día de cumpleaños del rector de la universidad? Se asume que los años son de 365 días.

Solución

La probabilidad de que entre n alumnos no haya ninguno con el mismo día de cumpleaños que el rector es $364^n/365^n$, y por tanto la probabilidad de que en una clase con n alumnos haya al menos uno con el cumpleaños deseado es $1 - 364^n/365^n$.

Ahora obtengamos el menor valor n natural tal que:

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n \geq \frac{1}{2},$$

es decir,

$$-n \cdot (\mathsf{ln}364 - \mathsf{ln}365) \geq \mathsf{ln}1 - \mathsf{ln}2,$$

concluyendo así que $n \geq 252{,}652$, luego la clase debe tener al menos 253 alumnos.

P2.22] ¿Cuál es el menor número de alumnos que debe tener una clase para garantizar con probabilidad 0.5 que haya al menos dos alumnos con igual día de cumpleaños?

Solución

Sea n el número de alumnos de una clase. Claramente, si $n > 365$, entonces seguro que hay alguna coincidencia. Asumamos por tanto que $n \leq 365$. La probabilidad de que en el aula no haya ninguna coincidencia es:

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n}.$$

Por tanto, se trata de encontrar el menor n tal que:

$$1 - \frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n} \geq \frac{1}{2},$$

es decir:

$$\ln 365! - \ln (365 - n)! - n \ln 365 \leq \ln 2.$$

Si $n = 22$ la probabilidad de que haya al menos una coincidencia es 0,4757, es decir, no cumple lo deseado. Sin embargo, para $n = 23$ tal probabilidad es 0,5073, es decir, sí cumple la desigualdad anterior, y por lo tanto el menor número de alumnos es 23.

P2.23] Un joven tiene un pleito sobre el que cree firmemente que él tiene la razón. Sabe que hay dos tribunales:

1. Tribunal A: formado por 3 personas que, con independencia, tienen probabilidad $p, p, 1/2$ respectivamente de emitir un informe individual correcto. El informe colectivo se obtiene mediante la regla de la mayoría entre los tres informes individuales.
2. Tribunal B: formado por 1 persona que tiene probabilidad p de emitir un informe correcto.

¿Por cuál de los dos tribunales debería optar el joven? Razonar la respuesta matemáticamente.

Solución

El tribunal A emite un informe conjunto acertado cuando se da uno de los siguientes sucesos:

- $A_1 \equiv$ "los dos miembros con probabilidad p aciertan".
  (Esto ocurre debido a que por la regla de la mayoría esto implica que el informe conjunto será acertado, sin importar el informe del miembro con probabilidad 1/2.)

- $A_2 \equiv$ "uno de los dos miembros de probabilidad p acierta y el otro no, y el miembro con probabilidad 1/2 acierta".

Puesto que ambos sucesos son disjuntos, la probabilidad de que el tribunal acierte es:

$$P(A_1) + P(A_2) = p^2 + 2 \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} = p.$$

Es decir, los dos tribunales tienen la misma probabilidad de emitir un informe acertado sobre un pleito.

P2.24] Una mano de póker consiste en cinco cartas seleccionadas sin reemplazamiento de una baraja de 52 (sin comodines). Determinar la probabilidad de obtener las siguientes combinaciones:

1. Escalera de color: las cinco cartas consecutivas y del mismo palo.
2. Escalera de color real: escalera de color con el As como carta mayor, detrás de la K.
3. Póker: cuatro cartas con la misma numeración.
4. Póker de ases.
5. Full: tres cartas con una numeración y las otras dos con otra.
6. Escalera: las cinco cartas consecutivas (el As puede ir al comienzo o al final).
7. Color: las cinco cartas del mismo palo.
8. Dobles parejas.
9. Trío.
10. Pareja.

Solución

Para introducir un espacio muestral denotemos cada carta mediante un par (n, e), donde n representa el número en la carta (es decir, $n \in \{1, 2, \ldots, 13\}$) y l representa el palo (es decir, $l \in \{A, B, C, D\}$). Entonces el espacio muestral es:

$$\Omega = \{w = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\} : \text{ para todo } i \neq j; w_i = (n, e),$$
$$n \in \{1, 2, \ldots, 13\}, e \in \{A, B, C, D\}, w_i \neq w_j\}.$$

Claramente este espacio es equiprobable y:

$$|\Omega| = C_{52,5} = \binom{52}{5}.$$

1. Definamos el suceso $A =$ "Se obtiene una escalera de color". Cada palo de la baraja tiene $52/4 = 13$ cartas, con las que se pueden formar $13 - 5 + 1 = 9$ escaleras de color. Por tanto, ya que hay cuatro palos distintos, se tiene que:

$$|A| = \binom{4}{1} \cdot 9 = 4 \cdot 9 = 36.$$

Luego:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{36}{\binom{52}{5}}.$$

2. Sea el suceso $B =$ "Se obtiene una escalera de color real". Por cada palo de la baraja sólo hay una escalera de color real posible. Por tanto:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}.$$

3. Sea C el suceso "Se obtiene un póker". Hay 13 numeraciones diferentes. Una vez escogidas 4 cartas con la misma numeración se elige entre las $52 - 4 = 48$ restantes la que falta para completar la mano, obteniéndose que

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{\binom{13}{1} \cdot 48}{\binom{52}{5}}.$$

4. Definamos el suceso $D =$"Se obtiene un póker de ases". Hay $52-4 = 48$ cartas posibles para añadir a los 4 ases y completar la mano, por lo que la probabilidad deseada es:

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{48}{\binom{52}{5}}.$$

5. Sea el suceso $E =$ "Se obtiene un full". Fijada una numeración, pueden formarse $C_{4,3} = 4$ conjuntos de tres cartas, ya que hay 4 palos distintos. Por lo tanto, como hay 13 posibles numeraciones distintas, en total se tienen $13 \cdot 4 = 52$ posibilidades para escoger las tres cartas iguales del full.

Para las dos cartas restantes hay que tener en cuenta que no pueden ser de la misma numeración anterior, luego, procediendo análogamente al caso anterior, hay en total $12 \cdot C_{4,2} = 12 \cdot 6 = 72$ combinaciones posibles. Finalmente, se calcula:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}.$$

6. Sea el suceso $F =$"Se obtiene una escalera". Hay $13-5+1 = 9$ numeraciones posibles de las escaleras, a las que hay que añadir una más que corresponde a la escalera con el *As* al final. Si fijamos una numeración $i, i+1, i+2, i+3, i+4$, con $i = 1, \dots, 9, 10$, tendremos, para cada valor de i, 4^5 escaleras (incluyendo las de color, y las de color real si $i = 10$). Si eliminamos las 4 escaleras de color correspondientes a esa numeración (una por cada palo), quedan $4^5 - 4 = 4 \cdot (4^4 - 1)$ escaleras y, dado que hay 10 numeraciones posibles. Entonces:
$$P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{4 \cdot (4^4 - 1) \cdot 10}{\binom{52}{5}}.$$
7. Representemos por G al suceso "Se obtiene color". Para cada palo, hay $C_{13,5}$ combinaciones posibles de 5 cartas. De ellas, como vimos en los apartados (a) y (b), 9+1=10 corresponden a escaleras de color y a escaleras de color reales. Por lo tanto se eliminan, resultando:
$$P(G) = \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{1} \cdot \left(\binom{13}{5} - 10\right)}{\binom{52}{5}}.$$
8. Definamos el suceso $H =$"Se obtienen dobles parejas". Hay $C_{13,2}$ formas distintas de elegir los palos con los que se forman las dos parejas, y $C_{4,2}$ de crear la pareja para cada uno de esos palos. Para la quinta carta quedan $52 - 4 - 2 - 2 = 44$ posibilidades, puesto que se restan, además de las cuatro cartas ya escogidas, las cuatro cartas que quedan con la misma numeración que cada una de las parejas. De este modo se evita obtener un full. Así, la probabilidad buscada es
$$P(H) = \frac{|H|}{|\Omega|} = \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 44}{\binom{52}{5}}.$$
9. Denotemos por I al suceso "Se obtiene un trío". Hay $C_{13,1} \cdot C_{4,3}$ combinaciones posibles de tres cartas con la misma numeración. Para las dos que completan la mano se debe tener en cuenta que ninguna de ellas puede tener la misma numeración que las tres cartas anteriores, ya que se obtendría un póker, y además ambas no pueden ser de la misma numeración, pues se formaría un full. Luego, una vez fijadas las 3 primeras, se escoge la cuarta carta de un conjunto de $52 - 4 = 48$ cartas (se descartan las 4 cartas que hay con la numeración de las tres ya elegidas), y para la última quedan, finalmente, $48 - 4 = 44$ posibilidades (se descartan las de la misma numeración que la cuarta carta). Además, como no se tiene en cuenta el orden en que se elijan estas dos últimas cartas, dividimos $48 \cdot 44$ por $2!$ y resulta:
$$P(I) = \frac{|I|}{|\Omega|} = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{48 \cdot 44}{2!}}{\binom{52}{5}}.$$

10. Sea J el suceso "Se obtiene una pareja". Las dos cartas que forman la pareja pueden escogerse de un total de $13 \cdot C_{4,2}$ parejas posibles. Para las tres que faltan deben descartarse aquellas combinaciones que, junto a las dos primeras cartas, formarían un trío, un póker o un full. Por lo tanto, y procediendo de forma similar al caso del trío, fijadas las dos primeras hay $52-4=48$ posibilidades para la tercera carta, $48-4=44$ para la cuarta y $44-4=40$ para la última. Análogamente al apartado anterior, se dividen las $48 \cdot 44 \cdot 40$ combinaciones de las tres últimas cartas por $3! = 6$, ya que no importa el orden en que éstas se elijan. Así:

$$P(J) = \frac{|J|}{|\Omega|} = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40}{\binom{52}{5}}.$$

P2.25] Un banco ha comprobado que la probabilidad de que un cliente con fondos extienda un cheque con fecha equivocada es de 0.001. En cambio, todo cliente sin fondos pone una fecha errónea en sus cheques. El 90 % de los clientes del banco tienen fondos. Se recibe hoy en caja un cheque con fecha equivocada. ¿Qué probabilidad hay de que sea de un cliente sin fondos?

Solución

Representemos un suceso elemental como $w = (w_1, w_2)$, donde w_1 representa si el cliente tiene o no fondos ($w_1 \in con, sin$) y w_2 representa si el cheque tiene o no fecha equivocada ($w_2 \in \{corr, equiv\}$). El espacio Ω no es equiprobable y tiene 4 elementos. Los datos que se dan son:

$$\begin{aligned}
P(w_2 = equiv | w_1 = con) &= 0{,}001, \\
P(w_2 = corr | w_1 = con) &= 0{,}999, \\
P(w_2 = equiv | w_1 = sin) &= 1, \\
P(w_2 = corr | w_1 = sin) &= 0, \\
P(w_1 = con) &= 0{,}9, \\
P(w_1 = sin) &= 0{,}1.
\end{aligned}$$

La probabilidad pedida es:

$$P(w_1 = sin | w_2 = equiv) = \frac{P(w_1 = sin \cap w_2 = equiv)}{P(w_2 = equiv)} =$$

$$= \frac{P(w_2 = equiv | w_1 = sin) \cdot P(w_1 = sin)}{P(w_2 = equiv | w_1 = sin) \cdot P(w_1 = sin) + P(w_2 = equiv | w_1 = con) \cdot P(w_1 = con)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 0{,}1}{1 \cdot 0{,}1 + 0{,}001 \cdot 0{,}9} = 0{,}99108.$$

P2.26] En una bolsa hay cinco bolas, blancas o negras. Se extrae una bola y es blanca. Hállese la probabilidad de que en la bolsa haya dos blancas y tres negras si para formar la urna se tiraron cinco monedas y se metieron tantas blancas como caras resultaron y tantas negras como cruces.

Solución

Representemos un suceso elemental como:

$$w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)\,,$$

donde w_1, w_2, w_3, w_4 y w_5 representan los resultados de los lanzamientos de la moneda, y por tanto también la composición de la urna. Adicionalmente, w_6 representa el color de la bola extraída de la urna. Denotemos por C_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ el suceso de obtener i caras en los 5 lanzamientos de la moneda, es decir, que la urna contenga i bolas blancas y $5 - i$ bolas negras, y sea B el suceso "extraer una bola blanca de la urna". Entonces el problema se resuelve mediante los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} P(C_2|B) &= \frac{P(C_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|C_2) \cdot P(C_2)}{\sum_{i=0}^{5} P(B|C_i) \cdot P(C_i)} = \\ &= \frac{\frac{2}{5} \cdot \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5}{\sum_{i=0}^{5} \frac{i}{5} \cdot \binom{5}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{\binom{4}{1}}{0 + \sum_{i=1}^{5} \binom{4}{i-1}} \\ &= \frac{4}{\sum_{i=0}^{5} \binom{4}{i}} = \frac{4}{(1+1)^4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

P2.27] Una urna contiene cinco dados con sus caras de color blanco o rojo. El dado número i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ tiene i de sus caras blancas y el resto rojas. Se selecciona al azar un dado de la urna, se lanza y sale cara roja. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado seleccionado sea el i?

Solución

Representemos un suceso elemental como $w = (w_1, w_2)\,,$ donde w_1 es el número de caras blancas del dado (y por tanto el número del dado), y w_2 es el color que se obtiene al lanzar el dado. Así:

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2) : w_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\,, w_2 \in \{B, R\}\}\,.$$

Este espacio muestral no es equiprobable, pues $P(\{(1, R)\}) \neq P(\{(5, R)\})\,.$

La probabilidad pedida es:

$$P(w_1 = i | w_2 = R) = \frac{P(w_1 = i \cap w_2 = R)}{P(w_2 = R)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P\left(w_2 = R | w_1 = i\right) \cdot P\left(w_1 = i\right)}{\sum_{j=1}^{5} P\left(w_2 = R | w_1 = j\right) \cdot P\left(w_1 = j\right)} = \\
&= \frac{\frac{6-i}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\sum_{j=1}^{5} \frac{6-j}{6} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{6-i}{6}}{5 - \frac{1}{6} \cdot \sum_{j=1}^{5} j} = \frac{\frac{6-i}{6}}{5 - \frac{1}{6} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2}} \\
&= \frac{\frac{6-i}{6}}{\frac{5}{2}} = \frac{6-i}{15}, i = 1, \ldots, 5.
\end{aligned}
$$

P2.28] Dos personas lanzan una moneda n veces cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan el mismo número de caras?

Solución

Representemos un suceso elemental como

$$w = \left(w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_{2n}\right),$$

con $w_i \in \{C, X\}$, donde $w_1, \ldots, w_n$ son los resultados de los n lanzamientos de una de las dos personas, y $w_{n+1}, \ldots, w_{2n}$ los resultados de la otra. Denotamos por $C_k, k = 0, 1, \ldots, n$ al suceso "ambas obtienen exactamente k caras". Dado que estos sucesos son disjuntos, la probabilidad de obtener el mismo número de caras viene dada por:

$$P\left(C_0 \cup C_1 \ldots \cup C_n\right) = \sum_{k=0}^{n} P\left(C_k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

P2.29] En un pueblo de $n+1$ habitantes, una persona le rumorea algo a una segunda persona, quien lo repite a una tercera, etc. En cada paso se elige aleatoriamente al receptor del rumor de entre n personas. Encontrar la probabilidad de que el rumor pase r veces sin:

1. regresar al que lo originó;
2. repetírsele a una persona.

Solución

Numeremos a los habitantes desde 0 hasta n, y supongamos que el rumor parte inicialmente del habitante 0. Para introducir un espacio muestral, vamos a representar cada suceso elemental como

$$w = \left(w_1, w_2, \ldots, w_r\right),$$

donde $w_i, i = 0, \ldots, n$ son las personas por las que pasa el rumor tras transmitirlo el habitante 0. Así:

$$\Omega = \left\{ w = (w_1, w_2, \ldots, w_r) : w_i \in \{0, 1, \ldots, n\}, w_1 \neq 0, w_i \neq w_{i-1} \right\}.$$

Este espacio es equiprobable y $|\Omega| = n^r$.

1. Sea el suceso $A =$ "El rumor pasa r veces sin regresar al habitante 0"$= \{w \in \Omega : w_i \neq 0, \text{ para todo } i\}$. Entonces:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n \cdot (n-1)^{r-1}}{n^r} = \left(\frac{n-1}{n} \right)^{r-1}.$$

2. Sea el suceso $B =$ "El rumor pasa r veces sin repetirse a ninguna persona"$= \{w \in \Omega : w_i \neq w_j, \text{ para todo } i \neq j\}$. Por lo tanto:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{n^r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot n^r}.$$

P2.30] Un ropero contiene n pares de zapatos. Si se escogen al azar $2r$ zapatos (con $2r < n$) ¿Cuál es la probabilidad de que:

1. no haya ningún par completo;
2. haya exactamente un par completo;
3. haya exactamente dos pares completos?

Solución

Representemos cada zapato mediante un par (y, z), donde y representa el número del par (es decir, $y \in \{1, 2, \ldots, n\}$) y z representa el pie (es decir, $z \in \{D, I\}$). Entonces, un espacio muestral es:

$$\Omega = \{w = \{w_1, \ldots, w_{2r}\} : w_i = (y_i, z_i), y_i \in \{1, \ldots, n\}, z_i \in \{D, I\}$$
$$; w_i \neq w_j, \text{ para todo } i \neq j\}.$$

Claramente este espacio es equiprobable, y

$$|\Omega| = \binom{2n}{2r}.$$

1. Definimos el suceso $A =$ "No hay ningún par completo":

$$A = \{w \in \Omega : y_i \neq y_j, \text{ para todo } i \neq j; i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Entonces,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{2r} \cdot 2^{2r}}{\binom{2n}{2r}}.$$

(Si $2r > n$, entonces $P(A) = 0$).

2. Definimos el suceso $B =$ "Hay exactamente un par completo":

$$B = \{w \in \Omega : \exists i \neq j / y_i = y_j \wedge \forall k \neq i, j : y_k \neq y_l, \forall l \neq k\},$$

luego,

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{1} \cdot \binom{n-1}{2r-2} \cdot 2^{2r-2}}{\binom{2n}{2r}}.$$

3. Definimos el suceso $C =$ "Hay exactamente dos pares completos":

$$C = \{w \in \Omega : \exists i \neq j / y_i = y_j \wedge \forall k \neq i, j : y_k \neq y_l, \forall l \neq k\}.$$

Así, se tiene que

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2r-4} \cdot 2^{2r-4}}{\binom{2n}{2r}}.$$

P2.31] Un examen de oposición consta de 14 temas. Se debe escoger un tema de entre dos tomados al azar. Calcular la probabilidad de que a un alumno que ha preparado 5 temas le toque al menos uno que sabe. ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para que tenga una probabilidad superior a 1/2 de superar el examen?

Solución

Representemos cada suceso elemental como $w = \{w_1, w_2\}$, donde $w_1, w_2 \in \{1, 2, \ldots, 14\}$. Así

$$\Omega = \{w = \{w_1, w_2\}; w_1, w_2 \in \{1, 2, \ldots, 14\}, w_1 \neq w_2\},$$

que es claramente un espacio muestral equiprobable.

Definimos el suceso $A =$ "Le toca al menos un tema que ha preparado". Entonces:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{14-5}{2}}{\binom{14}{2}} = 1 - \frac{36}{91} = \frac{55}{91}.$$

que es la probabilidad que se pide calcular.

Finalmente, supongamos que $i =$ "número de temas preparados por el alumno". Para superar el examen le debe tocar al menos un tema que haya preparado. Por lo tanto, la probabilidad de aprobar el examen sería $P(A)$, e imponiendo la condición del enunciado:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \binom{14-i}{2} / \binom{14}{2} > \frac{1}{2},$$

$$1-\frac{(14-i)\cdot(13-i)}{14\cdot 13}>\frac{1}{2}.$$

Efectuando las operaciones correspondientes, la inecuación se puede expresar como:

$$i^2-27i+91<0,$$

y resolviéndola se concluye que el alumno debe preparar como mínimo 4 temas.

P2.32] Obtener la probabilidad p de que al lanzar n veces dos dados se obtenga al menos un 6 doble. ¿Cuántas partidas habrá que jugar para que tengamos $p=1/2$ de obtener un 6 doble?

Solución

Un espacio muestral para este problema es:

$$\Omega=\left\{w=(w_1,w_2;w_3,w_4;\ldots;w_{2n-1},w_{2n}):w_i\in\{1,2,3,4,5,6\}\right\},$$

donde w_{2i-1} y $w_{2i}, i=1,2,\ldots,n$ son los resultados respectivos de ambos dados en el i-ésimo lanzamiento. Entonces, sea el suceso $A=$ "se obtiene al menos un 6 doble",

$$A=\left\{w\in\Omega:\exists k\in\{1,2,\ldots,n\},w_{2k-1}=w_{2k}=6\right\},$$

luego

$$A^c=\left\{w\in\Omega:(w_{2k-1},w_{2k})\neq(6,6)\,,\quad \text{para todo } k\in\{1,2,\ldots,n\}\right\}.$$

Luego, dado que los resultados de los lanzamientos del par de dados son independientes entre sí, y además la probabilidad de obtener un 6 doble es $1/6^2=1/36$, se tiene que:

$$P(A)=1-P(A^c)=1-\prod_{k=1}^{n}\left[1-P\left\{(w_{2k-1},w_{2k})=(6,6)\right\}\right]=1-\left[1-\frac{1}{36}\right]^n$$

Por último, veamos cuántas partidas necesitamos jugar para obtener un 6 doble con probabilidad $p=1/2$. Igualando:

$$1-\left[1-\frac{1}{36}\right]^n=\frac{1}{2},$$

$$n=\frac{-\ln 2}{\ln 35/36}=24{,}605.$$

Por tanto, tras aproximar el resultado, se concluye que necesitamos jugar 25 partidas.

P2.33] *Problema de Bertrand.* Dos arqueros de la misma destreza tiran al blanco, el primero dos flechas y el segundo una. Si gana el que tire la flecha más cercana al centro de la diana, ¿cuál es la probabilidad de que gane el primero?

Solución

Un espacio muestral para este problema consiste en considerar cada suceso elemental como la posición en proximidad al centro que ocupa cada lanzamiento. Así, por ejemplo, se puede considerar que los dos primeros lanzamientos son del primer arquero y el tercer lanzamiento es del segundo. Además, la probabilidad de que dos lanzamientos queden exactamente a igual distancia del centro se asume que es cero, con lo que el espacio muestral equivale a las distintas formas de reordenar las tres calificaciones "más cercano", "intermedio" y "más alejado" entre los tres lanzamientos. Claramente se trata de un espacio con $3! = 6$ sucesos elementales, todos ellos equiprobables.

Si cada elemento de dicho espacio se representa por $w = (w_1, w_2, w_3)$, siendo w_1 y w_2 el primer y segundo lanzamiento, respectivamente, del primer arquero, w_3 es el único lanzamiento del segundo arquero, entonces el suceso que nos interesa es

$$A = \{w : w_1 = \text{ "más cercano"}\} \cup \{w : w_2 = \text{ "más cercano"}\}$$

Dado que estos sucesos son disjuntos y contienen dos sucesos elementales cada uno de ellos, entonces $P(A) = 2/6 + 2/6 = 2/3$.

P2.34] *Problema de Galton.* Se lanzan tres monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de que las tres sean caras o las tres cruces?

Solución

Asumiendo que las monedas son distintas, representemos el espacio muestral como:

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, w_3) : w_i \in \{C, X\}, i = 1, 2, 3\}$$

donde w_i , $i = 1, 2, 3$ son los resultados respectivos de las tres monedas, siendo $C =$ "cara" y $X =$ "cruz" los resultados posibles de cada lanzamiento. Entonces, sean los sucesos $A =$ "se obtienen tres caras" y $B =$ "se obtienen tres cruces". Puesto que estos sucesos son disjuntos, se tiene que la probabilidad de obtener tres caras o tres cruces es $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = (1/2)^3 + (1/2)^3 = 1/4$.

P2.35] Una lotería vende n^2 boletos y da n premios. Si una persona compra n boletos, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos un premio?

Solución

Resolver este problema es equivalente a calcular la probabilidad de que, al extraer n bolas diferentes simultáneamente de una urna con n^2 bolas (numeradas de 1 a n), de las cuales n son negras y el resto blancas, al menos una de las bolas que se saquen sea negra. Un espacio muestral es:

$$\Omega = \left\{ w = \{w_1, \ldots, w_n\} : w_i \in \left\{1, \ldots, n^2\right\}; w_i \neq w_j, \forall i \neq j; i, j = 1, \ldots, n \right\},$$

que es claramente equiprobable. Si definimos el suceso $A =$ "se extrae al menos una bola negra", entonces la probabilidad pedida sería:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{n^2-n}{n}}{\binom{n^2}{n}}.$$

P2.36] Cierto profesor lleva siempre en el bolsillo dos cajas de N fósforos; cada vez que necesita un fósforo toma al azar una de las cajas. Al cabo de cierto tiempo una de las cajas está vacía. Calcular las correspondientes probabilidades de que en ese momento la otra contenga $r = 0, 1, \ldots, N$ fósforos suponiendo que:

1. la caja está vacía al tomar el último fósforo;
2. descubre la caja vacía cuando por primera vez la saca y no hay ya fósforos.

Solución

Supongamos que las dos cajas, que representaremos por A y B, tienen la misma probabilidad de ser tomadas. Para cada apartado del problema se definirá un espacio muestral.

1. Supongamos que la caja está vacía al tomar el último fósforo. Esto significa que el profesor ha tomado $2N - r$ fósforos en total: $N - r$ de una de las cajas y N de la otra (la que queda vacía), y una vez que deja vacía una caja, para. Por lo tanto, podemos definir como espacio muestral:

   $$\Omega = \{w = (w_1, w_2, \ldots, w_{2N-r}) : w_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, 2N - r\},$$

   donde cada $w_i, (i = 1, \ldots, 2N - r)$ representa la caja que se escoge en $i-$ésimo lugar (pudiéndose tomar o no fósforos de ella, ya que puede estar vacía). Se supone que $w_i = 1$ si se escoge la caja A y $w_i = 0$ si se escoge la B, para cada valor de $i\,(i = 1, 2, \ldots, 2N - r)$. Este espacio es claramente equiprobable, con $|\Omega| = 2^{2N-r}$.

Definamos el suceso $A =$"la caja A queda vacía y en la B quedan r fósforos".

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} w = (w_1, w_2, \ldots, w_{2N-r-1}, 1) : & w_i \in \{0,1\}, \\ & i = 1, \ldots, 2N-r-1; \\ & \sum_{i=1}^{2N-r-1} w_i = N-1 \end{array} \right\}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la caja A quede vacía y en la B queden r fósforos es $|M| / |\Omega| = C_{2N-r-1,N-1}/2^{2N-r}$. Esta probabilidad es igual a la del otro caso posible: que la caja B quede vacía y en la A queden r fósforos. De este modo, se obtiene finalmente que la probabilidad pedida es $2 \cdot C_{2N-r-1,N-1}/2^{2N-r}$.

2. Supongamos que descubre la caja vacía cuando por primera vez la saca y no hay ya fósforos. Por lo tanto, tras coger $2N - r$ fósforos (de los que N corresponden a la caja que queda vacía y $N - r$ a la otra) mediante el procedimiento de tomar una caja al azar y tomar un fósforo de ella, el profesor coge una última caja antes de parar: la caja que está vacía. Por lo tanto, se define como espacio muestral:

$$\Omega = \{w = (w_1, \ldots, w_{2N-r}, w_{2N-r+1}) : w_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, 2N-r\},$$

donde los w_i $(i = 1, 2, \ldots, 2N - r)$ se definen igual que en el apartado anterior. En este caso, $|\Omega| = 2^{2N-r+1}$.

Sea el suceso $B =$"la caja A queda vacía y en la B quedan r fósforos".

$$B = \left\{ w = (w_1, \ldots, w_{2N-r}, 1) : \begin{array}{l} w_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, 2N-r \\ \sum_{i=1}^{2N-r} w_i = N \end{array} \right\}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la caja A quede vacía y en la B queden r fósforos es $|M| / |\Omega| = C_{2N-r,N}/2^{2N-r+1}$. Esta probabilidad es igual a la del otro caso posible: que la caja B quede vacía y en la A queden r fósforos. De este modo, se obtiene finalmente que la probabilidad pedida es $2 \cdot C_{2N-r,N}/2^{2N-r+1}$.

P2.37] *Problema de Buffon.* Se tiene una mesa rayada con líneas paralelas separadas una distancia $2b$. Se lanza una aguja de longitud $2a$ para que caiga sobre la mesa. Hallar la probabilidad de que la aguja corte a alguna línea si $a \leq b$.

Solución

Un suceso elemental de este problema puede describirse mediante un par de números, $w = (w_1, w_2)$, donde el primero w_1 representa la distancia del centro de la aguja (tras caer sobre la mesa) a la línea más próxima, y el segundo w_2 representa el ángulo que la inclinación de la aguja tiene respecto de las líneas en la mesa. Nótese que por tanto $w_1 \in [0, b[$ y que $w_2 \in [0, \pi[$. En efecto, dado el objetivo que se persigue en el problema, es suficiente mirar sólo la posición respecto a la línea en la mesa más próxima y no interesa distinguir entre los dos extremos de la aguja (da igual la punta que el ojo de la aguja).

El conjunto de todos los sucesos elementales anteriores configura un espacio muestral $\Omega = [0, b[\times [0, \pi[$ claramente equiprobable. Por ello, la probabilidad de cualquier suceso $A \subseteq \Omega$ se obtiene dividiendo la integral sobre A entre $b\pi$. En concreto, si A es el suceso que representa "la aguja toca una línea" y, asumiendo que $a \leq b$, entonces

$$A := \{w \in \Omega : w_1 \in [0, a\,\mathsf{cos}(w_2)[\text{ para cada } w_2 \in [0, \pi[\}.$$

Consecuentemente

$$P(A) = \frac{1}{b\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{a\,\mathsf{cos}(y)} \partial x \right) \partial y = \frac{2a}{b\pi}$$

P2.38] Se consideran dos números aleatorios elegidos uniformemente y con independencia dentro del intervalo $[0, 1]$.

1. Calcular la probabilidad de que su diferencia sea mayor que $1/6$.
2. Calcular la probabilidad de que su suma sea mayor que 1.
3. Calcular la probabilidad de que su producto sea mayor que $1/7$.

Solución:

Un espacio muestral viene dado por

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2) : 0 \leq w_1 \leq 1 \text{ y } 0 \leq w_2 \leq 1\}.$$

Según la hipótesis del enunciado, se trata de un espacio equiprobable y por tanto se aplica la Ley de Laplace. Consecuentemente, el cálculo de la probabilidad de un suceso se limita al cálculo del área del correspondiente trozo en Ω, ya que el área del total es la unidad.

1. Sea A el suceso "su diferencia es mayor que $1/6$", es decir:

$$A = \{w \in \Omega : w_1 - w_2 > 1/6 \text{ o } w_2 - w_1 > 1/6\}$$

Gráficamente es fácil ver que el área de A es la de un cuadrado con lado $5/6$, es decir, $P(A) = (5/6)^2 = 0{,}69444$.

2. Sea B el suceso "su suma es mayor que 1", es decir:

$$B = \{w \in \Omega : w_1 + w_2 > 1\}.$$

Gráficamente se deduce que el área coincide con la de medio cuadrado, es decir:

$$P(B) = \frac{1}{2}.$$

3. Sea C el suceso "su producto es mayor que 1/7", es decir:

$$C = \{w \in \Omega : w_1 \cdot w2 > 1/7\}.$$

Concretamente:

$$P(C) = \left(\frac{1}{7} \cdot 1\right) + \int_{1/7}^{1} \left(\int_{1/(7w_1)}^{1} \partial w_2\right) \partial w_1 = 1 - \frac{1}{7} \cdot \ln 7.$$

P2.39] *Problema de encuentro.* Se conoce que en un intervalo de tiempo de 30 minutos llegan a un mismo punto de encuentro y de forma aleatoria dos personas. ¿Qué probabilidad existe de que una de las personas espere por la otra al menos 10 minutos?

Solución:

Este clásico problema en cualquier asignatura relacionada con las Probabilidades es una mera reformulación del problema anterior. En efecto, un espacio muestral equiprobable es $\Omega = \{w = (w_1, w_2) : 0 \leq w_1 \leq 30 \text{ y } 0 \leq w_2 \leq 30\}$. Si A representa los sucesos en los que "el encuentro sucede después de 10 minutos de espera por parte de algunas de las personas", es decir:

$$A = \{w \in \Omega : w_1 - w_2 > 10 \text{ o } w_2 - w_1 > 10\},$$

y de forma análoga a como se hizo en el problema anterior:

$$P(A) = \frac{5}{9}.$$

P2.40] Dos personas acuden a un punto de encuentro aleatoriamente entre las 18:00 y las 19:00 horas, pero sólo permanecen en dicho punto 5 minutos. ¿Qué probabilidad hay de que efectivamente coincidan?

Solución:

A efectos prácticos, no es relevante la hora en que acuden las personas al punto de encuentro, sino la fracción de una hora que ha transcurrido desde las 18:00 horas. Por lo tanto, y considerando que las 18:00 horas son el origen, sea $[x, x + 5/60] = [x, x + 1/12]$ el intervalo de tiempo, entre las 18:00 y 19:00 horas, que una de las personas permanece en el

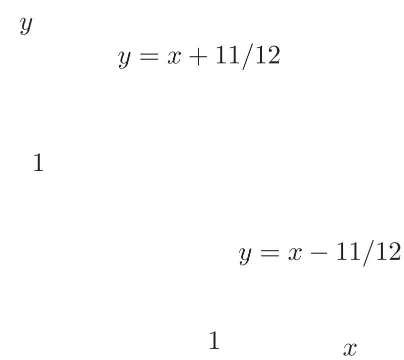

FIGURA 2.1: Región de casos favorables sobre casos posibles del problema P2.40.

punto de encuentro, e igualmente $[y, y + 1/12]$ el correspondiente a la otra persona. Nótese que en consecuencia x e y estarán comprendidos entre 0 y $1 - 11/12$, pues ambos representan la parte de una hora que transcurre hasta que las dos personas llegan respectivamente al punto de encuentro. Para que ambas coincidan debe verificarse que $x - 1/12 \leq y \leq x + 1/12$. La figura 2.1 muestra que el área comprendida entre estas dos rectas es $1^2 - (11/12)^2$, luego la probabilidad de coincidir será aproximadamente igual a 1/6.

P2.41] Un punto se mueve en el plano partiendo del origen por saltos de unidades enteras. Cuando está en la posición (m, n), para cualesquiera números enteros m y n, tiene una probabilidad p de pasar a la posición $(m+1, n)$ y una probabilidad $1-p$ de pasar a la $(m, n+1)$. Determinar la probabilidad de que el punto pase por la posición (a, b).

Solución:

Supongamos que el punto está inicialmente en la posición $(0, 0)$, por lo que para pasar por (a, b) debe realizar a desplazamientos a la derecha y b desplazamientos hacia arriba, es decir, un total de $a + b$ desplazamientos. Podemos representar cada suceso elemental como $w = (w_1, \ldots, w_{a+b})$, con $w_i \in \{D, A\}, i = 1, \ldots, a + b$, donde cada w_i es la dirección del $i-$ésimo movimiento: $D =$"derecha" y $A =$"arriba". Por lo tanto, un espacio muestral sería

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, \ldots, w_{a+b}) : w_i \in \{D, A\}, i = 1, \ldots, a + b\}.$$

Este espacio no es equiprobable si $p \neq 1/2$. La probabilidad de un suceso elemental con s movimientos a la derecha, por ejemplo, es $p^s \cdot (1 - p)^{a+b-s}$.

Definamos el suceso A ="el punto realiza a desplazamientos hacia la derecha y b hacia la izquierda". Cualquier suceso elemental de A tiene la misma probabilidad de ocurrir, y esta probabilidad es $p^a \cdot (1-p)^b$. Por lo tanto, ya que hay $C_{a+b,a}$ combinaciones posibles de estos $a+b$ movimientos, finalmente se tiene que

$$P(A) = \binom{a+b}{a} \cdot p^a \cdot (1-p)^b .$$

P2.42] Ocho personas se suben en un ascensor en el piso 0 de un edificio de once plantas (0,1,2,...,10,11). Cada persona selecciona el piso en el que se bajarán, entre el 1 y el 11, con igual probabilidad. Nadie más se subirá.

1. Calcular la probabilidad de que todas las personas se bajen antes del quinto piso. Calcular la probabilidad de que el ascensor llegue hasta el piso octavo y allí se bajen las últimas personas que queden.
2. Calcular la probabilidad de que en ningún piso se baje más de una persona. Calcular la probabilidad de que sólo dos personas viajen entre el piso sexto y el séptimo.

Solución:

Un modelo matemático para este problema puede consistir en considerar cada suceso elemental como la planta donde decide bajarse cada persona asumiendo, por ejemplo, que todas las personas son distinguibles. Es decir,

$$\Omega = \{w = (w_1, \ldots, w_8) : w_i \in \{1, \ldots, 11\} \text{ para cada } i = 1, \ldots, 8\} .$$

Este espacio muestral tiene $|\Omega| = 11^8$ sucesos elementales, y además todos ellos son igualmente probables. Como consecuencia de esto último, la probabilidad de cualquier suceso se calcula dividiendo el número de sucesos elementales que contiene entre $|\Omega|$.

Nótese que otro espacio muestral alternativo podría desarrollarse no distinguiendo entre las personas, es decir, identificando cada suceso elemental con el número de personas que se bajan en cada planta. Sin embargo, en este caso el cálculo de la probabilidad de un suceso no se reduce a contar cuántos sucesos elementales contiene ya que el nuevo espacio muestral no sería equiprobable.

1. Continuando con el espacio muestral Ω, sea A el suceso "todas las personas se bajan antes del quinto piso", es decir:

$$A = \{w \in \Omega : w_i < 5 \text{ para cada } i = 1, \ldots, 8\}.$$

Entonces $P(A) = |A|/|\Omega|$ donde $|A| = 4^8$, ya que cada componente de un suceso en A sólo puede asumir valores en $\{1, 2, 3, 4\}$. Por tanto,

$$P(A) = \left(\frac{4}{11}\right)^8 = 0,0003.$$

En general, para $k = 1, \ldots, 11$, si S_k representa el suceso "todas las personas se bajan antes del k-ésimo piso", es decir:

$$S_k = \{w \in \Omega : w_i < k \text{ para cada } i = 1, \ldots, 8\},$$

entonces $P(S_k) = |S_k|/|\Omega|$, donde $|S_k| = (k-1)^8$ ya que cada componente de un suceso en S_k sólo puede asumir valores en $\{1, \ldots, k-1\}$. Nótese que además $S_{k-1} \subseteq S_k$ para todo $k = 1, \ldots, 11$.
Consideremos ahora el suceso B definido por "el ascensor llega hasta el piso octavo y allí se bajan las últimas personas que quedan", es decir:

$$B = \{w \in \Omega : w_i < 9 \text{ para cada } i = 1, \ldots, 8 \text{ y existe un } j : w_j = 8\}.$$

Entonces $B = S_9 \setminus S_8$ y $|B| = |S_9 \setminus S_8| = |S_9| - |S_8|$. Consecuentemente,

$$P(B) = \frac{8^8 - 7^8}{11^8} = 0,0513.$$

2. Sea C el suceso "en ningún piso se baja más de una persona", es decir:

$$C = \{w \in \Omega : w_i \neq w_j \text{ para todo } i \neq j\}.$$

Entonces $P(C) = |C|/|\Omega|$ donde

$$|C| = \binom{11}{8} \cdot 8!.$$

El primer factor son las distintas formas de elegir las 8 plantas diferentes donde se bajarán las personas, y el segundo las distintas asignaciones porque estamos trabajando con un espacio muestral donde distinguimos entre personas.
Sea D el suceso "sólo dos personas viajan entre el piso sexto y el séptimo", es decir:

$$D = \left\{ w \in \Omega : \begin{array}{c} w_i \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ para seis índices } i, \text{ y} \\ w_j \in \{7,8,9,10,11\} \text{ para los otros índices } j \end{array} \right\}$$

Entonces $P(D) = |D|/|\Omega|$ donde

$$|D| = \binom{8}{6} \cdot 6^6 \cdot 5^2$$

El primer factor son las posibilidades de elegir las 6 personas que se bajarán antes de la planta séptima, quedando al tiempo fijas también las que se bajarán después de la sexta. El segundo factor son las posibilidades de que las 6 personas elegidas se bajen antes de la séptima, y el tercer factor las posibilidades de que las 2 personas restantes se bajen después de la sexta.

P2.43] A y B juegan 12 partidas de ajedrez. A gana seis, B gana cuatro y en dos quedan en tablas. Otro día acuerdan jugar un torneo de 3 partidas. Hallar la probabilidad de que

1. A gane las tres;
2. en dos partidas queden en tablas;
3. A y B ganen alternadamente;
4. B gane al menos una partida.

Solución:

Un posible espacio muestral es

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, w_3) : w_i \in \{A, B, X\}, i = 1, 2, 3\},$$

donde cada w_i $(i = 1, 2, 3)$ representa el resultado de la i-ésima partida del torneo, siendo este resultado A o B si la partida la gana el jugador A o el B, respectivamente, o bien X si quedan en tablas. Además, los resultados de las partidas son independientes. Por otra parte, a la vista de los resultados obtenidos en 12 partidas, se asume que las respectivas probabilidades de obtener cada uno de los resultados anteriores son $1/2, 1/3$ y $1/6$. Así, el espacio muestral dado no es equiprobable, puesto que, por ejemplo, $P(\{(A, B, A)\}) = 1/12$, pero $P(\{(A, B, B)\}) = 1/18$.

1. Sea M el suceso "A gana las tres partidas". Luego, $M = \{(A, A, A)\}$ y la correspondiente probabilidad es $P(M) = (1/2)^3 = 1/8$.
2. Definimos el suceso $N =$ "En dos partidas del torneo A y B quedan en tablas". Se tiene entonces que

$$N = N_1 \cup N_2 \cup N_3,$$

siendo

$$N_i = \{w = (w_1, w_2, w_3) : w_i \in \{A, B\}; w_j = X,$$

$$\text{para todo } j = 1, 2, 3,\ j \neq i\}, i = 1, 2, 3.$$

Nótese que los sucesos elementales que son permutaciones de un mismo conjunto de resultados individuales, tienen la misma probabilidad de ocurrir. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(N) &= 3 \cdot P(\{(A,X,X)\}) + 3 \cdot P(\{(B,X,X)\}) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{72}. \end{aligned}$$

3. Sea el suceso $S =$ "A y B ganan alternadamente". Así, como cada torneo consta de 3 partidas, se obtiene que

$$P(S) = P(\{(A,B,A)\}) + P(\{(B,A,B)\}) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{36}.$$

4. Representemos por T el suceso "B gana al menos una partida". La probabilidad deseada es

$$\begin{aligned} P(T) &= 1 - P(T^c) = 1 - P(\{(A,A,A)\}) - C_{3,1} \cdot P(\{(A,X,X)\}) \\ &\quad - C_{3,1} \cdot P(\{(A,A,X)\}) - P(\{(X,X,X)\}) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{72} + 3 \cdot \frac{1}{24} + \frac{1}{216}\right) = \frac{19}{27}. \end{aligned}$$

P2.44] Una bolsa contiene dos bolas blancas y tres bolas negras. Cada una de cuatro personas, A, B, C y D, en ese orden, saca una bola y no la repone. El primero que la saque blanca gana. Determinar las probabilidades de ganar de A, B, C y D.

Solución:

Representemos cada suceso elemental como $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$, donde cada $w_i, i = 1,2,3,4$ es el color de la bola que extrae la i-ésima persona, siendo $w_i = U$ si la bola es blanca y $w_i = V$ si es negra, para $i = 1,2,3,4$. Así, un espacio muestral sería

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \,/ w_i \in \{U, V\}, i = 1,2,3,4\},$$

que no es equiprobable.

Por otra parte, sean los sucesos $A_i =$ "La i-ésima persona gana"= "La primera bola blanca aparece en el i-ésimo lugar". Supondremos que las personas están ordenadas de A a D. Las probabilidades de ganar son, por tanto:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{2}{5}, \\ P(A_2) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_3) &= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{5}, \\ P(A_4) &= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{10}. \end{aligned}$$

P2.45] Una caja contiene ocho bolas rojas, tres blancas y nueve azules. Si se sacan tres bolas al azar, determinar la probabilidad de que:

1. las tres sean rojas;
2. las tres sean blancas;
3. dos sean rojas y una blanca;
4. al menos una sea blanca;
5. sean una de cada color;
6. salgan en el orden roja, blanca, azul.

Solución:

Asumiendo que las bolas se extraen de forma simultánea, consideremos el espacio muestral

$$\Omega = \{w = \{w_1, w_2, w_3\} : w_i \in \{r, b, a\}\},$$

donde $w_i, i = 1, 2, 3$ representa el color de cada bola que se extrae, siendo r si la bola es roja, b si es blanca y a si es azul. Este espacio no es equiprobable. Sin embargo, si se numeran las bolas del 1 al 20 (es decir, se consideran las bolas de un mismo color distinguibles entre sí) y se considera como espacio muestral $\Omega = \{w = \{w_1, w_2, w_3\} : w_i = 1, 2, \ldots, 20; i = 1, 2, 3\}$, sí se tendrá un espacio equiprobable,

siendo$|\Omega| = C_{20,3}$, y podremos usar la regla de Laplace.

1. Sea el suceso A = "Se extraen tres bolas rojas". La probabilidad pedida es entonces:

$$P(A) = \frac{C_{8,3}}{C_{20,3}} = \frac{14}{285}.$$

2. Representemos por B al suceso "Se extraen tres bolas blancas". Se tiene que:

$$P(B) = \frac{C_{3,3}}{C_{20,3}} = \frac{1}{1140}.$$

3. Definamos el suceso C = "Se extraen dos bolas rojas y una blanca". Teniendo en cuenta que hay 8 bolas rojas y 3 blancas, se obtiene:

$$P(C) = \frac{C_{8,2} \cdot C_{3,1}}{C_{20,3}} = \frac{7}{95}.$$

4. Sea D el suceso "Al menos una de las bolas extraídas es blanca". Entonces,

$$P(D) = 1 - P(D^c) = 1 - \frac{C_{17,3}}{C_{20,3}} = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57}.$$

5. Definamos el suceso E = "Se extraen 3 bolas de diferente color". Por lo tanto,

$$P(E) = \frac{C_{8,1} \cdot C_{3,1} \cdot C_{9,1}}{C_{20,3}} = \frac{18}{95}.$$

6. Para calcular la probabilidad pedida, dado que las bolas se extraen una a una y sin reemplazamiento, debemos definir un nuevo espacio muestral en el que se tenga en cuenta el orden de extracción. Si numeramos las bolas del 1 al 20 (para así distinguir entre sí a las bolas de un mismo color, al igual que se hizo al comienzo del ejercicio), se tiene que un espacio muestral es:

$$\Omega' = \left\{ w = (w_1, w_2, w_3) : \begin{array}{rl} w_i = 1, 2, \ldots, 20 & i = 1, 2, 3 \\ w_i \neq w_j & \text{para todo } i \neq j \end{array} \right\}.$$

Este espacio es claramente equiprobable, con $\left|\Omega'\right| = V_{20,3}$.

Sea el suceso F = "Las tres bolas se extraen en el orden roja, blanca, azul". Se tiene entonces, dado que hay 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules, que:

$$P(F) = \frac{8 \cdot 3 \cdot 9}{V_{20,3}} = \frac{3}{95}.$$

Obsérvese que este nuevo espacio muestral Ω' podría haberse usado desde el comienzo del problema para calcular también las probabilidades de los cinco primeros apartados. Sin embargo, para ello se recurrió al espacio muestral Ω, que es mucho más sencillo que Ω' y no tiene en cuenta el orden de aparición de las bolas. No obstante, si se realizaran todos los cálculos sólo con este espacio se obtendría:

$$P(A) = \frac{V_{8,3}}{V_{20,3}} = \frac{14}{285}.$$

$$P(B) = \frac{V_{3,3}}{V_{20,3}} = \frac{1}{1140}.$$

Teniendo en cuenta que hay $V_{8,2}$ formas de ordenar dos bolas rojas tomadas de las 8 que existen, y $V_{3,1}$ formas de tomar las bolas blancas, hay, para cada distribución de éstas, $C_{3,1}$ formas de combinar esas 3 bolas de forma ordenada, manteniendo las dos bolas rojas en su posición relativa, obteniéndose que:

$$P(C) = \frac{C_{3,1} \cdot V_{8,2} \cdot V_{3,1}}{V_{20,3}} = \frac{7}{95}.$$

Del mismo modo que antes, también se tiene que:

$$P(D) = 1 - P(D^c) = 1 - \frac{V_{17,3}}{V_{20,3}} = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57}.$$

Finalmente, si han de ser de tres colores diferentes, se debe tener en cuenta que, fijadas las tres bolas, hay 3! maneras posibles de ordenarlas. Por lo tanto,

$$P(E) = \frac{3! \cdot V_{8,1} \cdot V_{3,1} \cdot V_{9,1}}{V_{20,3}} = \frac{18}{95}.$$

P2.46] De una baraja de 52 naipes se sacan 5. Hallar la probabilidad de que:

1. cuatro sean Ases;
2. cuatro sean Ases y uno Rey;
3. tres sean Dieces y dos Sotas;
4. salgan Nueve, Diez, Sota, Caballo y Rey en cualquier orden;
5. tres sean de un palo y dos de otro; y
6. al menos uno sea un As.

Solución:

Para introducir un espacio muestral denotemos cada carta mediante un par de números (n, l), donde n representa el número en la carta (es decir, $n \in \{1, 2, \ldots, 13\}$) y l representa el palo (es decir, $l \in \{A, B, C, D\}$). Entonces el espacio muestral es:

$$\Omega = \{w = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\} : w_i \neq w_j, \text{ para todo } i \neq j; w_i = (n, l),$$

$$n \in \{1, 2, \ldots, 13\}, l \in \{A, B, C, D\}\}.$$

Claramente este espacio es equiprobable y:

$$|\Omega| = \binom{52}{5} = 2598960.$$

1. Sea A el suceso "Cuatro de las cinco cartas escogidas son Ases". Una vez fijados los 4 Ases, hay un total de $52 - 4 = 48$ posibilidades para la quinta carta. Aplicando la regla de Laplace, se obtiene que:

$$P(A) = \frac{1 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{54145}.$$

2. Representemos por B al suceso "Cuatro cartas son Ases y una Rey". En este caso, una vez fijados los 4 Ases, hay 4 posibilidades para la quinta carta: los 4 Reyes. Así, se tiene que

$$P(B) = \frac{1 \cdot 4}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{649740}.$$

3. Sea el suceso $C =$ "Hay tres Dieces y dos Sotas". Se tienen $C_{4,3}$ formas de escoger tres Dieces, que han de combinarse con el total de $C_{4,2}$ formas de elegir las dos Sotas. Por lo tanto:

$$P(C) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{108290}.$$

4. Definamos el suceso $D =$ "Salen Nueve, Diez, Sota, Caballo y Rey en cualquier orden". Nótese que no importa el orden en que aparezcan las cartas, por lo que podemos continuar usando el espacio muestral definido al principio del ejercicio. Se obtiene que:

$$P(D) = \frac{\binom{4}{1}^5}{\binom{52}{5}} = \frac{64}{162435}.$$

5. Sea E el suceso "Tres cartas son de un palo y dos de otro". La baraja tiene 4 palos, por lo que hay $C_{4,2}$ formas de escoger los dos palos. Para cada una de éstas, ya que cada palo consta de 13 cartas, se tiene un total de $C_{13,3}$ y $C_{13,2}$ posibilidades para elegir las tres y dos cartas, respectivamente, de cada uno de los dos palos, resultando:

$$P(E) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{429}{8330}.$$

6. Sea el suceso $F =$ "Al menos una de las cartas es un As". Así, el suceso $F^c =$ "Ninguna carta es un As", y es más sencillo recurrir a éste para el cálculo de la probabilidad de F. Nótese que hay 4 Ases en la baraja, por lo hay $C_{52-4,5}$ formas de escoger cinco cartas sin que ninguna de ellas sea un As. De esta forma se tiene que:

$$P(F) = 1 - P(F^c) = 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 1 - \frac{35673}{54145} = \frac{18472}{54145}.$$

P2.47] En una urna que contiene n bolas se echa una bola roja, extrayendo posteriormente una bola. Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea roja, si son igualmente probables todas las suposiciones posibles sobre el color inicial (rojo/no rojo) de las n bolas que contiene la urna.

Solución:

Representemos cada suceso elemental como $w = (c, r, \overline{r})$, donde c representa el color de la bola extraída, y r y $\overline{r}$ son el número de bolas rojas y no rojas, respectivamente, que hay en la urna después de introducir una bola roja en la urna inicial. Un espacio muestral viene dado por

$$\Omega = \left\{ w = (c, r, \overline{r}) : c \in \left\{ R, \overline{R} \right\}; r = 1, \ldots, n+1; \overline{r} = 0, \ldots, n; r + \overline{r} = n+1 \right\},$$

donde el color de la bola que se saca, c, es R si la bola es roja y $\overline{R}$ si es de otro color. Este espacio no es equiprobable, como se verá a continuación.

Definamos el suceso $A =$ "Se extrae una bola roja", que es el conjunto de sucesos elementales:

$$A = \{ w = (R, r, \overline{r}) \ : \ r = 1, \ldots, n+1 : \overline{r} = 0, \ldots, n; r + \overline{r} = n+1 \}.$$

Sean también los sucesos $B_{ij} =$ "Después de introducir una bola roja, la urna tiene i bolas rojas y j bolas de otro color"$= \left\{ w = (c, i, j) \ / \ c \in \left\{ R, \overline{R} \right\} \right\}$, con $i = 1, \ldots, n+1$; $j = 0, \ldots, n$; $i + j = n+1$. Por el enunciado del problema, las suposiciones para los colores de las n bolas de la urna inicial son equiprobables, por lo que también lo serán las urnas que resultan de añadir una bola roja a las iniciales. Por lo tanto, ya que se tiene un total de $n+1$ urnas posibles, se verifica que $P(B_{ij}) = 1/(n+1)$, para todo $i = 1, \ldots, n+1$; $j = 0, \ldots, n$, con $i + j = n+1$. Se comprueba que, por ejemplo:

$$P(\{(R, 1, n)\}) = P(A|B_{1,n}) \cdot P(B_{1,n}) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2},$$

pero

$$P(\{(R, 2, n-1)\}) = P(A|B_{2,n-1}) \cdot P(B_{2,n-1}) = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2},$$

por lo que el espacio muestral definido no es equiprobable.

Para calcular $P(A)$, nótese que se han de tener en cuenta todas las posibles combinaciones para la urna. Los sucesos B_{ij} (con $i = 1, \ldots, n+1; j = 0, \ldots, n$; $i + j = n+1$) constituyen una partición de Ω. Por lo tanto, aplicando el teorema de la probabilidad total, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_{1,n}) \cdot P(B_{1,n}) + P(A|B_{2,n-1}) \cdot P(B_{2,n-1}) \\ &\quad + \ldots + P(A|B_{n+1,0}) \cdot P(B_{n+1,0}) = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \ldots + \frac{n+1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \frac{n+2}{2 \cdot (n+1)}. \end{aligned}$$

P2.48] Considérese el intervalo de la recta real $[0, a]$ con $a > 0$.

1. Calcular la probabilidad de que el producto de dos números tomados al azar sobre tal intervalo sea menor que una constante b. Cuantificar tal probabilidad suponiendo $b = 2$ y $a = 4$.
2. Para los valores de a y b del apartado anterior, calcular la probabilidad de que el producto de los dos números tomados al azar sea menor que b, sabiendo que su suma es mayor que b.

Solución:

Un posible espacio muestral es $\Omega = \{w = (x, y) \ : \ 0 \le x, y \le a, \ \}$, donde x e y son dos números tomados al azar sobre el intervalo $[0, a]$. Este espacio es claramente equiprobable, ya que los números se eligen de forma uniforme e independiente.

1. Sea el suceso $A =$ "El producto de dos números tomados al azar en el intervalo $[0, a]$ es menor que b"$= \{w \in \Omega : x \cdot y < b\}$. Nótese que el espacio muestral tomado es equiprobable, por lo que el cálculo de $P(A)$ se reduce, aplicando la ley de Laplace, a obtener el área A, que es una parte de la superficie de un cuadrado de lado a, para dividirla por el área de este cuadrado, que corresponde al espacio Ω. Además, se deben distinguir dos casos:

   - Si $b \le a^2$, debemos dividir el área deseada en dos partes. Para la primera de ellas el área es inmediata, puesto que es un rectángulo de lados b/a y a. Sin embargo, para la segunda debemos calcular la correspondiente integral, y la figura 2.2 ayuda a ello. El resultado final es:

   $$P(A) = \frac{1}{a^2} \cdot \left[b + \int_{b/a}^{a} \left(\int_0^{b/x} \partial y \right) \partial x \right] = \frac{1}{a^2} \cdot \left(b + b \cdot \ln \left(a^2/b \right) \right).$$

   - Si $b > a^2$, se tiene que $b/a > a$, por lo que $P(A) = a^2/a^2 = 1$.

   En el caso particular $b = 2$ y $a = 4$ resulta: $P(A) = 1/8 \cdot (1 + L_n 8) \cong 0{,}38$.

2. Definamos el suceso $B =$ "La suma de dos números tomados al azar en el intervalo $[0, a]$ es mayor que b"$= \{w \in \Omega / w_1 + w_2 > b\}$. El área deseada es la intersección de A y B, para $b = 2$ y $a = 4$. Obsérvese que si utilizamos el área correspondiente obtenida en el apartado anterior, todo se reduce a restar a ésta el área de un triángulo rectángulo de base 2 y altura 2. Por lo tanto, el resultado es:

   $$P(A \cap B) = \frac{1}{16} \cdot (2 + 2 \cdot L_n 8 - 2) \cong 0{,}26.$$

y

a

$y = b/x$

a x

FIGURA 2.2: Región para integrar en el problema P2.48.

P2.49] Se eligen dos puntos aleatoria e independientemente de un segmento de longitud unidad, resultando dividido en tres nuevos segmentos. Hallar la probabilidad de que

1. cada uno de ellos tenga una longitud mayor o igual que $1/4$;
2. se pueda formar un triángulo con ellos como lados.

Solución:

Un posible espacio muestral es $\Omega = \{w = (w_1, w_2) : \ w_1, w_2 \in [0,1]\}$, donde w_1 y w_2 son las distancias del primero y segundo punto, respectivamente, al extremo inferior del segmento. Por lo tanto, los segmentos que se forman tienen longitudes $w_1, w_2 - w_1$ y $1 - w_2$. Además, este espacio es claramente equiprobable, pues los puntos se eligen de forma aleatoria e independiente.

1. Representemos por A al suceso "Cada uno de los segmentos que se forman tiene una longitud mayor o igual que $1/4$", que es el conjunto

$$A = \{w = (w_1, w_2) \in \Omega \ : \ w_1 \geq 1/4, w_2 - w_1 \geq 1/4, 1 - w_2 \geq 1/4\}.$$

Procediendo análogamente al ejercicio anterior, el cálculo de $P(A)$ se reduce a obtener el área del triángulo que forman las tres rectas correspondientes a las desigualdades anteriores. Por lo tanto:

$$P(A) = \frac{(1/4)^2}{2} = \frac{1}{32}.$$

2. Representemos por a, b y c a las longitudes de los segmentos que se forman con los tres puntos elegidos aleatoriamente. Para dos valores de a y b (dentro de los posibles), con $a < b$, nótese que sólo con un

segmento de longitud c que verifique $b-a < c < b+a$ podrá formarse un triángulo.

Sea el suceso $B =$ "Podemos formar un triángulo con los segmentos obtenidos $(a < b)$". Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene que $B = B_1 \cup B_2$, con:

$$B_1 = \{w = (w_1, w_2) \ : \ w_2 - 2 \cdot w_1 < 1 - w_2 < w_2;$$

$$w_2 - 2 \cdot w_1 \geq 0, w_1, w_2 \in [0,1]\},$$

que corresponde al caso $a \leq b$, y

$$B_2 = \{w = (w_1, w_2) \ : 2 \cdot w_1 - w_2 < 1 - w_2 < w_2;$$

$$w_2 - 2 \cdot w_1 < 0, w_1, w_2 \in [0,1]\},$$

para $a > b$. Además, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Procediendo análogamente al primer apartado de este ejercicio, se tiene que el área deseada corresponde a dos triángulos que forman un triángulo rectángulo de base 1/2 y altura 1/2. Por lo tanto, el resultado es $P(B) = 1/8$. Análogamente, cuando $a \geq b$, la probabilidad de poder formar un triángulo con los segmentos obtenidos es 1/8, por lo que se concluye que la probabilidad de poder formar un triángulo es 1/4.

P2.50] Un inversor tiene la posibilidad de invertir en dos tipos de valores V_1 y V_2. Si invierte en V_1 tiene una probabilidad de 0.6 de obtener 16 millones de beneficio, y si invierte en V_2 tiene una probabilidad de 0.8 de conseguir 12 millones. Si en tal inversión obtiene beneficios, está dispuesto a volver a invertir en el mismo tipo de valor. En cambio, si no obtiene beneficios, invertirá en el otro tipo.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga beneficios en la segunda inversión?
2. Si finalmente obtiene beneficios, ¿cuál es la probabilidad de que la primera inversión la hubiera efectuado en V_1?

Solución:

Un espacio muestral para este problema viene dado por

$$\Omega = \left\{w = (w_1, w_2) : w_i = (w_{i1}, w_{i2}) \, ; w_{i1} \in \{V_1, V_2\} \, , w_{i2} \in \left\{B, \overline{B}\right\} ; i = 1, 2\right\},$$

donde w_{i1} representa el tipo de valor en el que invierte la i-ésima vez, siendo V_1 o V_2 si es del tipo 1 o del tipo 2 respectivamente, y w_{i2} el resultado de esa inversión, que será B si obtiene beneficios o $\overline{B}$ si no los obtiene. Además, dado que si el inversor no obtiene beneficios con un tipo de valor entonces no vuelve a invertir en él, un suceso elemental del tipo $w = (w_1, w_2)$, con $w_1 = \left(V_1, \overline{B}\right), w_2 = (V_1, B)$, por ejemplo, tendría probabilidad cero. Si, por el contrario, obtiene beneficios, entonces repite con el tipo de valor. Por tanto, el espacio Ω no es equiprobable.

1. Sean $M_{k\overline{B}}$ y M_{kB} los sucesos "No obtiene beneficios con una primera inversión en V_k" y "Obtiene beneficios con una primera inversión en V_k", respectivamente, con $k = 1, 2$. Se tiene que

$$M_{k\overline{B}} = \left\{w \in \Omega \ : \ w_{11} = V_k, w_{12} = \overline{B}\right\},$$

y

$$M_{kB} = \{w \in \Omega \ : \ w_{11} = V_k, w_{12} = B\},$$

con $k = 1, 2$. Estos sucesos constituyen una partición del espacio Ω. Definamos también los sucesos $N_{k\overline{B}}$ = "No obtiene beneficios con una segunda inversión en V_k" y N_{kB} = "Obtiene beneficios con una segunda inversión en V_k", que son el conjunto de sucesos elementales:

$$N_{k\overline{B}} = \left\{w \in \Omega \ : \ w_{21} = V_k, w_{22} = \overline{B}\right\},$$

y

$$N_{kB} = \{w \in \Omega \ : \ w_{21} = V_k, w_{22} = B\},$$

respectivamente. Estos sucesos constituyen también una partición del espacio Ω. De acuerdo con los datos que proporciona el problema y suponiendo que elegir el tipo de valor 1 en la primera inversión o elegir el 2 son igualmente probables, se verifica que

$$P(M_{1B}) = P(M_{1B}|M_{1B} \cup M_{1\overline{B}}) \cdot P(M_{1B} \cup M_{1\overline{B}}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3,$$
$$P(M_{1\overline{B}}) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2.$$

Se procede de forma análoga con los dos sucesos restantes, obteniéndose que

$$P(M_{2B}) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4,$$
$$P(M_{2\overline{B}}) = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1.$$

Para que obtenga beneficios en la segunda inversión hay que tener en cuenta dos posibilidades: que los obtenga invirtiendo en el primer tipo o bien en el segundo. De esta forma, resulta

$$\begin{aligned} P(N_{1B}) &= P(N_{1B}|M_{1B}) \cdot P(M_{1B}) + P(N_{1B}|M_{2\overline{B}}) \cdot P(M_{2\overline{B}}) = \\ &= 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}24, \\ P(N_{2B}) &= P(N_{2B}|M_{2B}) \cdot P(M_{2B}) + P(N_{2B}|M_{1\overline{B}}) \cdot P(M_{1\overline{B}}) = \\ &= 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}48, \end{aligned}$$

por lo que finalmente:

$$P(N_{1B} \cup N_{2B}) = P(N_{1B}) + P(N_{2B}) = 0{,}72.$$

2. Utilizando los sucesos definidos en el apartado anterior, la probabilidad deseada es

$$\begin{aligned} & P\left(M_{1B} \cup M_{1\overline{B}} | N_{1B} \cup N_{2B}\right) \\ &= P\left(M_{1B} | N_{1B} \cup N_{2B}\right) + P\left(M_{1\overline{B}} | N_{1B} \cup N_{2B}\right), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} & P\left(M_{1B} | N_{1B} \cup N_{2B}\right) \\ &= P\left(N_{1B} \cup N_{2B} | M_{1B}\right) \cdot P\left(M_{1B}\right) / P\left(N_{1B} \cup N_{2B}\right) \\ &= \left[P\left(N_{1B} | M_{1B}\right) + P\left(N_{2B} | M_{1B}\right)\right] \cdot P\left(M_{1B}\right) / P\left(N_{1B} \cup N_{2B}\right) = \\ &= (0{,}6 + 0) \cdot 0{,}3/0{,}72 = 0{,}25, \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} & P\left(M_{1\overline{B}} | N_{1B} \cup N_{2B}\right) \\ &= P\left(N_{1B} \cup N_{2B} | M_{1\overline{B}}\right) \cdot P\left(M_{1\overline{B}}\right) / P\left(N_{1B} \cup N_{2B}\right) = \\ &= \left[P\left(N_{1B} | M_{1\overline{B}}\right) + P\left(N_{2B} | M_{1\overline{B}}\right)\right] \cdot P\left(M_{1\overline{B}}\right) / P\left(N_{1B} \cup N_{2B}\right) = \\ &= (0 + 0{,}8) \cdot 0{,}2/0{,}72 \cong 0{,}2222, \end{aligned}$$

por lo que la probabilidad de que la primera inversión la hubiera efectuado en V_1 habiendo obtenido beneficios en la segunda inversión es aproximadamente 0.472.

P2.51] Una urna contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se extraen 4 bolas una a una con reemplazamiento. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de este experimento? Supuesto que se cumple la regla de Laplace, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

1. La primera bola extraída está numerada con 3 y la segunda con 0.
2. El número que se forma con las bolas acaba en 380.
3. El número que se forma con las bolas es mayor que 3571.

Supongamos una lotería, en la que cada boleto cuesta 1.000 ptas., cuyo sorteo consiste en extraer 4 bolas, según el experimento previo. Obtienen premios todos los boletos cuyos números coincidan con las 4, 3, 2 ó 1 últimas cifras del número extraído. La cuantía (no acumulable) de los premios es de: 2.000.000 ptas. si coinciden las 4 cifras; 200.000 ptas. si coinciden sólo las tres últimas cifras; 20.000 ptas. si coinciden las 2 últimas cifras; y 2.000 ptas. si coincide la última cifra. ¿Sería rentable jugar a esta lotería?

Solución:

Un espacio muestral viene dado por

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \ : \ w_i = 0, 1, \ldots, 9; \text{ para todo } i \neq j\},$$

donde w_i representa el número de la bola que aparece en la i-ésima extracción, para $i = 1, 2, 3, 4$. Nótese que las bolas se extraen con reemplazamiento y son todas diferentes entre sí, por lo que este espacio es equiprobable y tiene un total de $|\Omega| = 10^4$ elementos.

1. Sea el suceso $A =$ "La primera bola es un tres y la segunda un cero".

$$A = \{w \in \Omega \ : \ w_1 = 3, w_2 = 0\}.$$

Aplicando la regla de Laplace se obtiene que $P(A) = |A| / |\Omega| = 10^2/10^4 = 0{,}01$.

2. Definamos el suceso $B =$ "El número que se forma con las bolas acaba en 380".

$$B = \{w \in \Omega \ : \ w_2 = 3, w_3 = 8, w_4 = 0\}.$$

La probabilidad deseada es $P(B) = |B| / |\Omega| = 10/10^4 = 0{,}001$.

3. Representemos por C al suceso "El número que se forma con las bolas es mayor que 3571", que es el conjunto:

$$\begin{aligned} C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 &= \{w \in \Omega \ : \ w_1 > 3\} \\ \cup \{w \in \Omega \ : \ w_1 = 3, w_2 > 5\} &\cup \{w \in \Omega \ : \ w_1 = 3, w_2 = 5, w_3 > 7\} \\ \cup \{w \in \Omega \ &: \ w_1 = 3, w_2 = 5, w_3 = 7, w_4 > 1\}, \end{aligned}$$

donde los sucesos C_i son disjuntos, $i = 1, 2, 3, 4$. Por lo tanto:

$$|C| = |C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| = 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8 = 6428.$$

Finalmente se obtiene que $P(C) = 6428/10^4 = 0{,}6428$.

Si suponemos una lotería con boletos de 1000 pesetas en la que se obtienen premios de diferente cuantía según el número de cifras que coinciden con el número extraído en el sorteo, necesitamos definir una variable aleatoria que mida el premio que gana el jugador con el boleto que ha adquirido. Para ello, supongamos que y es el número del boleto comprado, y consta de las cifras siguientes: y_1, y_2, y_3 e y_4. Sean los sucesos $A_i =$ "Las i últimas cifras del boleto coinciden con las del número premiado"=

$\{w \in \Omega \ : \ w_j = y_j, \forall j = 4 - i + 1, \ldots, 4; w_k \neq y_k, \forall k \neq j\}$, con $i = 1, 2, 3, 4$. Por otra parte, definamos sobre el espacio muestral dado al principio del ejercicio una variable aleatoria ξ que representa la ganancia del jugador, con el boleto que ha comprado, para el número premiado en el sorteo. Se tiene que

$$P\left(\xi = 2 \cdot 10^{2+i}\right) = P\left(\left\{w \in \Omega \ : \ \xi(w) = 2 \cdot 10^{2+i}\right\}\right)$$
$$= P(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{9^{4-i}}{10^4},$$

para $i = 1, 2, 3, 4$. De aquí se deduce que

$$P(\xi = 0) = 1 - \sum_{i=1}^{4} \frac{9^{4-i}}{10^4} = 0{,}918.$$

Finalmente, utilizaremos estas probabilidades calculadas para ver la ganancia esperada del jugador, obteniéndose:

$$E[\xi] = \sum_{i=1}^{4} 2 \cdot 10^{2+i} \cdot \frac{9^{4-i}}{10^4} = 687{,}8.$$

Por lo tanto, no es rentable jugar a esta lotería, puesto que el dinero que se invierte en un boleto es mucho mayor que la ganancia que se espera conseguir.

P2.52] Una urna contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5. Se extraen dos bolas una a una sin reemplazamiento, y se supone que existe aleatoriedad uniforme. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:

1. Se selecciona una bola con número impar la primera vez.
2. Se selecciona una bola con número impar la segunda vez.
3. Se seleccionan las dos bolas con número impar.

Generalizar el problema al caso de que la urna contenga n bolas, numeradas de 1 a n. ¿Se obtienen los mismos resultados cuando n es par que cuando es impar?

Solución:

Consideremos el espacio muestral

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2) \ : \ w_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, w_1 \neq w_2\},$$

donde w_i representa el número de la bola de la i-ésima extracción, para $i = 1, 2$. Este espacio es equiprobable, con $|\Omega| = 20$.

1. Sea el suceso $A =$ "Se selecciona una bola con número impar la primera vez":
$$A = \{w \in \Omega \ : \ w_1 \in \{1, 3, 5\}\}.$$
Aplicando la regla de Laplace se obtiene que
$$P(A) = \frac{3 \cdot 4}{20} = \frac{3}{5}.$$

2. Representemos por B al suceso "Se selecciona una bola con número impar la segunda vez":
$$\begin{aligned} B \ = \ & \{w \in \Omega \ : \ w_2 \in \{1, 3, 5\}\} = \{w \in \Omega \ : \ w_1, w_2 \in \{1, 3, 5\}\} \\ & \cup \{w \in \Omega \ : \ w_1 \in \{2, 4\}, w_2 \in \{1, 3, 5\}\}. \end{aligned}$$
Análogamente al apartado anterior, resulta
$$P(B) = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{20} = \frac{3}{5}.$$

3. Definamos el suceso $C = \{w \in \Omega : w_1, w_2 \in \{1, 3, 5\}\}$. Se tiene por tanto:
$$P(C) = \frac{3 \cdot 2}{20} = \frac{3}{10}.$$

En el caso general de que la urna contenga n bolas, numeradas de 1 a n, utilizaremos el espacio muestral
$$\Omega = \{w = (w_1, w_2) \ : \ w_i \in \{1, \ldots, n\}, w_1 \neq w_2\},$$
con $|\Omega| = n \cdot (n-1)$, y se han de distinguir dos casos:

- Si n es par:

1. Sea el suceso $A =$ "Se selecciona una bola con número impar la primera vez":
$$A = \left\{w \in \Omega \ : \ w_1 = 2 \cdot i - 1, \text{ para todo } i = 1, \ldots, \frac{n}{2}\right\}.$$
Aplicando la regla de Laplace se obtiene que
$$P(A) = \frac{\frac{n}{2} \cdot (n-1)}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{2}.$$

2. Representemos por B al suceso "Se selecciona una bola con número impar la segunda vez". De forma análoga resulta
$$P(B) = \frac{1}{2}.$$

3. Definamos el suceso

$$C = \{w \in \Omega : w_1, w_2 = 2 \cdot i - 1, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n/2\}.$$

La probabilidad pedida es

$$P(C) = \frac{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)}{n \cdot (n-1)} = \frac{n-2}{4 \cdot (n-1)}.$$

- Si n es impar:

1. En este caso, el suceso

$$A = \{w \in \Omega \ : \ w_1 = 2 \cdot i - 1, \text{ para todo } i = 1, \ldots, (n+1)/2\},$$

obteniéndose por lo tanto que

$$P(A) = \frac{\frac{n+1}{2} \cdot (n-1)}{n \cdot (n-1)} = \frac{n+1}{2 \cdot n}.$$

2. Análogamente

$$P(B) = \frac{n+1}{2 \cdot n}.$$

3. Por último, se obtiene que

$$P(C) = \frac{\frac{(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)}{n \cdot (n-1)} = \frac{n+1}{4 \cdot n}.$$

A la vista de los resultados obtenidos, se puede concluir que para calcular estas probabilidades se ha de distinguir si el número de bolas es par o impar, puesto que de un caso a otro las probabilidades difieren.

P2.53] Se dispone de tres cajas idénticas y cada caja contiene dos cajones. Una caja contiene una moneda de oro en cada cajón, otra contiene una moneda de plata en cada cajón, y la tercera una moneda de oro en un cajón, y una moneda de plata en el otro cajón.

1. Se selecciona aleatoriamente una caja, ¿cuál es la probabilidad de que la caja seleccionada contenga monedas de diferentes metales?
2. Se selecciona aleatoriamente una caja, y al abrir aleatoriamente un cajón, nos encontramos con una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro cajón contenga una moneda de plata?

Solución:

Numeremos las cajas: la caja 1 es aquella caja con 2 monedas de oro, la 2 es la que tiene 2 monedas de plata y, finalmente, las monedas de diferente metal (una de oro y otra de plata) se encuentran en la caja 3. Sea entonces el espacio muestral

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2) \ : \ w_1 \in \{1,2,3\} ; w_2 \in \{O, P\}\},$$

donde w_1 representa la caja escogida y w_2 el metal de la moneda que contiene un cajón de esa caja escogido de forma aleatoria. Este espacio muestral no es equiprobable, pues, por ejemplo,

$P(\{(1,P)\}) = 0$, pero $P(\{(1,O)\}) = 1/3$.

1. Sea el suceso $A_i =$ “Se selecciona la caja i”, $i = 1,2,3$. En nuestro caso, $i = 3$, por lo que el suceso A_3 es equivalente a “La caja seleccionada tiene monedas de diferentes metales”. Sean también los sucesos $B_o =$ “La moneda en el cajón escogido de forma aleatoria en la caja seleccionada es de oro”y B_p el correspondiente a una moneda de plata. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(\{(3,O)\}) + P(\{(3,P)\}) \\ &= P(B_o|A_3) \cdot P(A_3) + P(B_p|A_3) \cdot P(A_3) = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. Si uno de los cajones contiene una moneda de oro y el otro una de plata, la caja en la que se encuentran es la B. Por lo tanto, la probabilidad pedida, es:

$$\begin{aligned} P(A_3|B_o) &= \frac{P(B_o|A_3) \cdot P(A_3)}{P(B_o)} = \\ &= \frac{P(B_o|A_3) \cdot P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_o|A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

P2.54] Una urna contiene 8 bolas blancas y 4 bolas negras. Se sacan dos bolas una a una con reemplazamiento. Sea A el suceso: “la primera bola extraída es blanca”; y B el suceso: “al menos una de las dos bolas extraídas es blanca”. Calcular $P(A \cap B)$, $P(A \cap B^c)$, $P(A^c \cap B)$, $P(A^c \cap B^c)$ y las probabilidades condicionadas $P(A|B)$, $P(A|B^c)$, $P(B|A)$ y $P(B|A^c)$.

Solución:

Un espacio muestral para este problema es

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2) \ : \ w_i \in \{b, n\}, i = 1, 2\},$$

donde cada w_i representa el color de la bola extraída en i- ésimo lugar, con $i = 1,2$, siendo igual a b si la bola es blanca y n si es negra. Este espacio no es equiprobable, ya que, por ejemplo, $P(\{(b,b)\}) = (8/12)^2$, pero $P(\{(b,n)\}) = 8/12 \cdot 4/12$. Se tiene que:

$$A \cap B = A = \{(b,b), (b,n)\},$$

$$A \cap B^c = \emptyset, \; A^c \cap B = \{(n,b)\},$$

$$A^c \cap B^c = B^c = \{(n,n)\}.$$

Por lo tanto, se calculan las probabilidades correspondientes, y resulta:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(\{(b,b)\}) + P(\{(b,n)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, \\ P(A \cap B^c) &= 0, \\ P(A^c \cap B) &= P(\{(n,b)\}) = \frac{2}{9}, \\ P(A^c \cap B^c) &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Una vez visto esto, las probabilidades condicionadas son:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{1 - P(B^c)} = \frac{3}{4}, \\ P(A|B^c) &= \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = 0, \\ P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1, \\ P(B|A^c) &= \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

P2.55] Se lanza una moneda tres veces y en una urna vacía se ponen tantas bolas blancas como número de caras obtenidas y tantas negras como el número de lanzamiento en que se obtiene cruz por primera vez, si es que se obtiene alguna.

1. ¿Son independientes el número de bolas blancas y el número de bolas negras? ¿Son condicionalmente independientes dado que en la urna hay más de tres bolas?
2. Se sacan dos bolas de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color? Si son de distinto color, ¿cuál es la probabilidad de que la urna quede vacía?

Solución:

Un espacio muestral para este problema es

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, w_3) \ : \ w_i \in \{C, X\}, i = 1, 2, 3\},$$

donde w_i representa el resultado del i-ésimo lanzamiento de la moneda: C si es "cara"y X si es "cruz", para $i = 1, 2, 3$. Este espacio es equiprobable, con $|\Omega| = 2^3 = 8$. Definamos los sucesos $A_{jk} =$ "En la urna hay j bolas blancas y k negras", para $j, k = 0, 1, 2, 3$. Se tiene así que los únicos sucesos distintos del vacío serán:

$$\begin{gathered}
A_{30} = \{(C, C, C)\}, A_{21} = \{(X, C, C)\}, \\
A_{22} = \{(C, X, C)\}, A_{23} = \{(C, C, X)\}, \\
A_{11} = \{(X, X, C), (X, C, X)\}, \\
A_{12} = \{(C, X, X)\}, A_{01} = \{(X, X, X)\}.
\end{gathered}$$

Definamos también los sucesos $A_{l\cdot} =$ "En la urna hay l bolas blancas", para $l = 0, 1, 2, 3$ y $A_{\cdot m} =$ "En la urna hay m bolas negras", para $m = 0, 1, 2, 3$.

1. Se tiene, por ejemplo, que $P(A_{2\cdot} \cap A_{\cdot 3}) = P(A_{23}) = 1/8$, pero $P(A_{2\cdot}) = 3/8$ y $P(A_{\cdot 3}) = 1/8$, por lo que $P(A_{2\cdot} \cap A_{\cdot 3}) \neq P(A_{2\cdot}) \cdot P(A_{\cdot 3})$. Se concluye así que el número de bolas blancas y el número de bolas negras no son independientes.

   Por otra parte, sea el suceso $B =$ "La urna tiene más de 3 bolas"$= A_{22} \cup A_{23}$. Veamos todos los casos posibles. Supongamos que $j \neq 2$, luego $P(A_{j\cdot} \cap A_{\cdot k}|B) = P(A_{jk}|B) = 0$, y además $P(A_{j\cdot}|B) = 0$, por lo que $P(A_{j\cdot} \cap A_{\cdot k}|B) = P(A_{j\cdot}|B) \cdot P(A_{\cdot k}|B) = 0$, para cualquier valor de k, con $k = 0, 1, 2, 3$. En el caso de que $j = 2$, se tiene que

   $$P(A_{2\cdot} \cap A_{\cdot k}|B) = P(A_{2k}|B) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } k = 2, 3 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

   y además $P(A_{2\cdot}|B) = 1$ y

   $$P(A_{\cdot k}|B) = 1 = \begin{cases} 1/2 & \text{si } k = 2, 3 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

   Por lo tanto, $P(A_{2\cdot} \cap A_{\cdot k}|B) = P(A_{2\cdot}|B) \cdot P(A_{\cdot k}|B)$, para cualquier valor de $k = 0, 1, 2, 3$. De esto y de lo obtenido anteriormente para $j \neq 2$ se tiene que el número de bolas blancas y el número de bolas negras en la urna son condicionalmente independientes dado que en la urna hay más de tres bolas.

2. Suponiendo que las dos bolas se extraen sin reemplazamiento, y dado que no importa el orden en que éstas se extraigan, podemos definir el espacio muestral

$$\Omega^{'} = \{w = (w_1, w_2, w_3, x) \ : \ w_i \in \{C, X\}, i = 1, 2, 3; \ x = 0, 1, 2\},$$

donde x representa el número de bolas blancas en una extracción de dos bolas de una urna formada según el resultado de las 3 tiradas. Este espacio no es equiprobable.

Sea el suceso $A =$ "Las dos bolas extraídas son de distinto color". Sean también los sucesos $B_i =$ "De las dos bolas extraídas, i son blancas", para $i = 0, 1, 2$. Por lo tanto:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - [P(B_0) + P(B_2)],$$

y utilizando los sucesos definidos en el apartado anterior para aplicar el teorema de las probabilidades totales, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(B_0|A_{30}) \cdot P(A_{30}) + P(B_0|A_{21}) \cdot P(A_{21}) \\ &\quad + P(B_0|A_{22}) \cdot P(A_{22}) + P(B_0|A_{23}) \cdot P(A_{23}) \\ &\quad + P(B_0|A_{11}) \cdot P(A_{11}) + P(B_0|A_{12}) \cdot P(A_{12}) \\ &\quad + P(B_0|A_{01}) \cdot P(A_{01}), \end{aligned}$$

resultando una probabilidad

$$P(B_0) = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} \right) = \frac{1}{10}.$$

Procediendo de manera análoga se llega a que $P(B_2) = 1/5$. De este modo

$$P(A) = 1 - [P(B_0) + P(B_2)] = \frac{7}{10}.$$

Si las dos bolas extraídas son de distinto color, la urna quedará vacía sólo si antes de las extracciones tenía 1 bola blanca y 1 negra. Por lo tanto, y usando los sucesos definidos anteriormente, se tiene que la probabilidad de que la urna quede vacía después de extraer una bola blanca y una negra es:

$$P(A_{11}|B_1) = \frac{P(B_1|A_{11}) \cdot P(A_{11})}{P(B_1)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{23}{40}} = \frac{10}{23},$$

donde $P(B_1)$ se ha calculado de forma análoga a $P(B_0)$.

P2.56] Cuatro tiradores disparan independientemente sobre cuatro objetivos, cada uno sobre uno. Cada tirador dispone de seis balas. La probabilidad de acertar en el objetivo con cada tiro es de 0.8. Un tirador deja de disparar al alcanzar el blanco.

1. Probabilidad de que alguno de los tiradores consuma toda su munición.
2. Si todos los tiradores consumen la munición, ¿cuál es la probabilidad de que todos los objetivos hayan sido alcanzados?
3. Calcular la probabilidad de que sobren dos balas en total.

Solución:

Un espacio muestral es

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \ : \ w_i = (w_{i1}, w_{i2})\,;$$
$$w_{i1} = 0,1,2,3,4,5; w_{i2} \in \{a, f\}\,; \text{ para todo } i = 1,2,3,4\},$$

donde cada w_{i1} representa el número de balas que le sobran al tirador i tras acertar en el objetivo, y w_{i2} es el resultado que ha obtenido, que será a si acierta y f si falla, para todo $i = 1,2,3,4$. Nótese que si a un tirador le sobra alguna bala, significa que ha acertado. Sin embargo, si no le sobra ninguna, puede que haya acertado al disparar la última bala o bien que éste tiro también lo haya fallado. Nótese también que desde que un jugador falle los 5 primeros tiros, ya no le sobrará ninguna bala, sea cual sea el resultado para esta última.

1. Sea A el suceso "Alguno de los tiradores consume toda su munición". Definamos también los sucesos A_{ij} = "Al tirador i le sobran j balas", para $i = 1,2,3,4$ y $j = 0,1,2,3,4,5$. Por lo tanto:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_{i0}^c\right),$$

y ya que los tiradores disparan independientemente y su probabilidad de acierto es 0.8, se tiene que

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - \prod_{i=1}^{4} P(A_{i0}^c) = 1 - \prod_{i=1}^{4} [1 - P(A_{i0})] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{4} \left[1 - \left(0{,}2^5 \cdot 0{,}8 + 0{,}2^5 \cdot 0{,}2\right)\right] = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{4} \left[1 - 0{,}2^5\right] = 1.\,2794 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

2. Definamos los sucesos $B_i =$ "El tirador i acierta", para $i = 1, 2, 3, 4$. Los tiradores disparan de manera independiente, por lo que la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{4} B_i | \bigcap_{i=1}^{4} A_{i0}\right) &= \prod_{i=1}^{4} P\left(B_i | A_{i0}\right) = \left[P\left(B_1 | A_{10}\right)\right]^4 \\ &= \left[\frac{P\left(B_1 \cap A_{10}\right)}{P\left(A_{10}\right)}\right]^4 = \left(\frac{0{,}2^5 \cdot 0{,}8}{0{,}2^5}\right)^4 \\ &= 0{,}8^4 = 0{,}4096. \end{aligned}$$

3. Nótese que para que entre los cuatro tiradores sobren dos balas tiene que suceder que, o bien ambas le sobran al mismo tirador o bien a dos tiradores diferentes. Todos los tiradores tienen la misma probabilidad de acertar, por lo que si vemos estos dos casos para dos tiradores concretos, podemos luego extenderlo a todos. Por lo tanto, y teniendo en cuenta, como siempre, que disparan de forma independiente, se tiene que:

$$P\left(A_{12} \cap \left(\bigcap_{i=2}^{4} A_{i0}\right)\right) = (0{,}2)^3 \cdot 0{,}8 \cdot \left[(0{,}2)^5\right]^3 = (0{,}2)^{18} \cdot 0{,}8,$$

y por otra parte

$$P\left(A_{11} \cap A_{21} \cap \left(\bigcap_{i=3}^{4} A_{i0}\right)\right) = \left[(0{,}2)^4 \cdot 0{,}8\right]^2 \cdot \left[(0{,}2)^5\right]^2 = (0{,}2)^{18} \cdot (0{,}8)^2 .$$

Si denotamos por C al suceso "Sobran dos balas en total", entonces, teniendo en cuenta todos los casos posibles, resulta:

$$\begin{aligned} P\left(C\right) &= C_{4,1} \cdot (0{,}2)^{18} \cdot 0{,}8 + C_{4,2} \cdot (0{,}2)^{18} \cdot (0{,}8)^2 = \\ &= 4 \cdot (0{,}2)^{18} \cdot 0{,}8 + 6 \cdot (0{,}2)^{18} \cdot (0{,}8)^2 = 1.8455 \cdot 10^{-12}. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

Distribuciones de probabilidad

Dado un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, una *variable aleatoria* ξ sobre Ω es una función real que actúa como un "aparato de medida" sobre los sucesos elementales:

$$\begin{array}{rccl} \xi: & \Omega & \longrightarrow & I\!R \\ & w & \longmapsto & \xi(w) \end{array}$$

Se llama *función de distribución* de ξ a otra función real, ahora con dominio también real, tal que:

$$\begin{array}{rccl} F_\xi: & I\!R & \longrightarrow & I\!R \\ & x & \longmapsto & F_\xi(x) = P(\{w \in \Omega : \xi(w) \leq x\}) \end{array}$$

En general, dada una función real F cualquiera tal que:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
2. F no decreciente,
3. F continua por la derecha,

se dice *función de distribución*, ya que siempre es posible diseñar un espacio muestral con una probabilidad y una variable aleatoria cuya función de distribución sea F.

Atendiendo a la forma de su función de distribución, las variables aleatorias reales pueden ser clasificadas en tres tipos:

Discretas: Pueden tomar un número discreto (finito o numerable) de valores reales.

Continuas: Pueden tomar todos los valores de uno o varios intervalos de la recta real, que pueden ser acotados o no acotados.

Mixtas: Son combinaciones de las dos anteriores.

Dada una variable aleatoria discreta ξ, se llama *función de probabilidad* a:

$$P_\xi(k) = P(\{w \in \Omega : \xi(w) = k\}), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Dada una variable aleatoria continua ξ, se llama *función de densidad* a:

$$f_\xi(x) \quad \text{tal que} \quad F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t) \cdot \partial t, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Se llama *esperanza* de una variable aleatoria ξ a:

- $E[\xi] = \sum_{k \in \xi(\Omega)} k \cdot P_\xi(k)$, si la variable aleatoria es discreta.
- $E[\xi] = \int_{t \in \xi(\Omega)} t \cdot f_\xi(t) \cdot \partial t$, si la variable aleatoria es continua.

Se llama *varianza* de una variable aleatoria ξ a:

$$V[\xi] = E\left[(\xi - E[\xi])^2\right] = E\left[\xi^2\right] - (E[\xi])^2.$$

Dada una variable aleatoria ξ, se define:

1. Función característica de ξ (esta función siempre existe):
$$\varphi_\xi(t) = E\left[e^{it\xi}\right].$$
2. Función generatriz de probabilidades (o función generatriz de momentos factoriales) de ξ discreta:
$$\phi_\xi(t) = E\left[t^\xi\right].$$
3. Función generatriz de momentos de ξ:
$$G_\xi(t) = E\left[e^{t\xi}\right].$$

Denotaremos por $F(y^-)$ al límite de $F(x)$ cuando x se aproxima a y por la derecha.

Ejercicios Resueltos

P3.1] En una universidad se ha observado que el 60 % de los estudiantes que se matriculan lo hacen en una carrera de Ciencias, mientras que el otro 40 % lo hacen en carreras de Humanidades. Si un determinado día se realizan 20 matrículas, calcular la probabilidad de que:

1. haya igual número de matrículas en Ciencias y en Humanidades;
2. el número de matrículas en Ciencias sea menor que en Humanidades;
3. haya al menos 8 matrículas en Ciencias;
4. no haya más de 12 matrículas en Ciencias.
5. Si las cinco primeras matrículas son de Humanidades, calcular la probabilidad de que:
   a) en total haya igual número de matrículas en Ciencias y en Humanidades;
   b) en total haya al menos 6 en Ciencias más que en Humanidades.

Solución

Sea ξ una variable aleatoria que mide el número de matrículas en Humanidades de un total de 20 matrículas. Suponiendo que los estudiantes eligen su carrera de forma independiente entre ellos, y teniendo presente (según el enunciado) que la probabilidad de que alguien se matricule en Humanidades es $1 - 0{,}6 = 0{,}4$, se tiene que esta variable es una binomial de parámetros $n = 20$ y $p = 0{,}4$, siendo:

$$P(\xi = k) = \binom{20}{k} \cdot 0{,}4^k \cdot (1 - 0{,}4)^{20-k}, \text{ para todo } k = 0, \ldots, 20.$$

1. La probabilidad de que haya igual número de matrículas es:

$$P(\xi = 10) = \binom{20}{10} \cdot 0{,}4^{10} \cdot (1 - 0{,}4)^{20-10} = 0{,}11714.$$

2. Para calcular la probabilidad de que el número de matrículas en Ciencias sea menor que el número de matrículas en Humanidades debe obtenerse:

$$P(\xi > 10) = 1 - F_\xi(10) = 1 - 0{,}8725 = 0{,}1275.$$

3. La probabilidad de que haya al menos 8 matrículas en Ciencias es equivalente a la probabilidad de que haya como máximo 12 matrículas en Humanidades. Por lo tanto:

$$P(\xi \leq 12) = F_\xi(12) = 0{,}9790.$$

4. La probabilidad de que no haya más de 12 matrículas en Ciencias es:
$$P(\xi \geq 8) = 1 - F_\xi(7) = 1 - 0{,}4159 = 0{,}5851.$$
5. Nótese que las matrículas son independientes entre sí, por lo que si las cinco primeras son en Humanidades, podemos definir una nueva variable η, también binomial, pero con parámetros $n = 20 - 5 = 15$ y $p = 0{,}4$, que determina el número de matrículas en Humanidades de un total de 15 matrículas. De esta forma:
   a) La probabilidad de que en total haya igual número de matrículas en Ciencias que de matrículas en Humanidades es:
   $$P(\eta = 5) = F_\eta(5) - F_\eta\left(5^-\right) = 0{,}4032.$$
   b) La probabilidad de que en total haya al menos 6 matrículas en Ciencias más que en Humanidades es:
   $$P(\eta \leq 2) = F_\eta(2) = 0{,}0271.$$

P3.2] Determinar k para que la siguiente función sea de distribución:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - k(1-x), & 0 \leq x < k \\ 1, & k \leq x \end{cases}$$
Calcular la probabilidad de $[1/2, 1]$ condicionada por $[1/2, 2]$.

Solución

Las tres primeras condiciones vistas en el ejercicio anterior para tener una función de distribución se verifican para cualquier valor de k. Sin embargo, para que se verifiquen las dos últimas condiciones deben descartarse ciertos valores de k. Ya que $k > 0$, se tiene que
$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = k > 0, 0 \leq x < k.$$
Además, debe verificarse que $F(x) \geq 0,$ para todo x. En particular, $1 - k(1-x) \geq 0, 0 \leq x < k$ cuando $k \leq 1$. Se comprueba que para $0 < k \leq 1$ la función es monótona creciente y positiva, por lo que se tiene que, en ese caso, F es función de distribución.

Bajo la condición $0 < k \leq 1$, calculemos la probabilidad pedida:
$$\begin{aligned} P([1/2,1] \mid [1/2,2]) &= \frac{P([1/2,1] \cap [1/2,2])}{P([1/2,2])} = \frac{P([1/2,1])}{P([1/2,2])} \\ &= \frac{F(1) - F(1/2^-)}{F(2) - F(1/2^-)} = \frac{F(1) - F(1/2^-)}{F(1) - F(1/2^-)} = 1. \end{aligned}$$

P3.3] Sea la probabilidad en $I\!R$ dada por

$$P((-\infty,x]) = \begin{cases} 0, & x \leq -4 \\ (x+4)/16, & -4 < x < \sqrt{2} \\ (x-\sqrt{2}+4)/8, & \sqrt{2} \leq x < 4+\sqrt{2} \\ 1, & 4+\sqrt{2} \leq x \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de los siguientes conjuntos: $[0,1]$, $[0,\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2},4]$, $(\sqrt{2},4)$, $\{0,1\}$, $\{4+\sqrt{2}\}$, $\{\sqrt{2}\}$, $[0,5)$, $[2,8]$, $I\!N$, $\mathbb{Q}\cap[0,1]$, $[-2,2]-\mathbb{Q}$.

Solución

Nótese que esta función es continua en todo $I\!R$, excepto en el punto $\sqrt{2}$. Teniendo eso en cuenta, calculemos las probabilidades que se piden:

- $P([0,1]) = P((-\infty,1]) - P((-\infty,0)) = 5/16 - 4/16 = 1/16.$
- $P\left([0,\sqrt{2}]\right) = P((-\infty,\sqrt{2}]) - P((-\infty,0)) = 4/8 - 4/16 = 1/4.$
- $P\left([\sqrt{2},4]\right) = P((-\infty,4]) - P((-\infty,\sqrt{2})) = \left(8-\sqrt{2}\right)/8 - \left(\sqrt{2}+4\right)/16 = 3/4 - 3\sqrt{2}/16.$
- $P\left((\sqrt{2},4)\right) = P((-\infty,4)) - P((-\infty,\sqrt{2}]) = \left(8-\sqrt{2}\right)/8 - 4/8 = 1/2 - \sqrt{2}/8.$
- $P(\{0,1\}) = 0.$
- $P\left(\{4+\sqrt{2}\}\right) = 0$
- $P\left(\{\sqrt{2}\}\right) = P\left((-\infty,\sqrt{2}]\right) - P\left((-\infty,\sqrt{2})\right) = 4/8 - \left(\sqrt{2}+4\right)/16 = 1/4 - \sqrt{2}/16.$
- $P([0,5)) = P((-\infty,5)) - P((-\infty,0)) = P((-\infty,5]) - P((-\infty,0]) = \left(9-\sqrt{2}\right)/8 - 4/16 = \left(7-\sqrt{2}\right)/8.$
- $P([2,8]) = P((-\infty,8]) - P((-\infty,2)) = 1 - \left(6-\sqrt{2}\right)/8.$
- $P(I\!N) = 0.$
- $P(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0.$
- $P([-2,2]-\mathbb{Q}) = P\left(\{\sqrt{2}\}\right) = 1/4 - \sqrt{2}/16.$

P3.4] Sea la probabilidad en $I\!R$ dada por

$$P((-\infty,x]) = \begin{cases} e^x/2, & -\infty < x \leq 0 \\ 1-e^{-x}/2, & 0 < x \end{cases}$$

Calcular las probabilidades de: $[0,1], [-2,2), \{0\}, \{1,2,3\}, [1,3].$

Solución

Las probabilidades que se piden son:

- $P([0,1]) = P((-\infty,1]) - P((-\infty,0)) = 1 - e^{-1}/2 - 1/2 = 1/2 - e^{-1}/2$.
- $P([-2,2)) = P((-\infty,2)) - P((-\infty,-2)) = 1 - e^{-2}/2 - e^{-2}/2 = 1 - 2e^{-2}/2 = 1 - 1/e^2$.
- $P(\{0\}) = P((-\infty,0]) - P((-\infty,0)) = 1/2 - 1/2 = 0$.
- $P(\{1,2,3\}) = 0$.
- $P([1,3]) = P((-\infty,3]) - P((-\infty,1)) = 1 - e^{-3}/2 - \left(1 - e^{-1}/2\right) = \left(-e^{-3} + e^{-1}\right)/2$.

P3.5] Sea la probabilidad en $I\!R^2$:

$$P((-\infty,x] \times (-\infty,y]) = xy(x+y)/2 \text{ si } 0 \le x,y \le 1.$$

Calcular las probabilidades de

$$(0,0{,}5) \times (0{,}5,1) \quad , \quad [0{,}2,0{,}8] \times \{0{,}5\} \quad , \quad [0{,}4,1]^2$$

$$(0{,}3,0{,}4) \times [0{,}4,0{,}5] \quad , \quad [0{,}2,0{,}6]^2 \cup [0{,}4,0{,}8]^2 \quad , \quad \{(x,y) : x+y \le 1\}.$$

Solución

Procedemos a calcular las probabilidades correspondientes, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} P([a,b] \times [c,d]) &= P((-\infty,b] \times (-\infty,d]) - P((-\infty,b] \times (-\infty,c]) \\ &\quad - P((-\infty,a] \times (-\infty,d]) + P((-\infty,a] \times (-\infty,c]). \end{aligned}$$

En caso de que el intervalo sea abierto o semiabierto, estas probabilidades se calculan de manera análoga, puesto que:

$$P((-\infty,x] \times (-\infty,y]) = P((-\infty,x] \times (-\infty,y))$$

$$= P((-\infty,x) \times (-\infty,y]) = P((-\infty,x) \times (-\infty,y)).$$

De esta forma se obtiene que:

- $P((0,0{,}5) \times (0{,}5,1)) = 0{,}5 \cdot 1 \cdot (0{,}5+1)/2 - 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5+0{,}5)/2 - 0 = {,}25$.
- $P([0{,}2,0{,}8] \times \{0{,}5\}) = 0$.
- $P\left([0{,}4,1]^2\right) = 1 \cdot 1 \cdot (1+1)/2 - 2 \cdot [1 \cdot 0{,}4 \cdot (1+0{,}4)/2] + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}4+0{,}4)/2 = 0{,}504$.
- $P((0{,}3,0{,}4) \times [0{,}4,0{,}5]) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}4+0{,}5)/2 - 0{,}4^2 \cdot (0{,}4+0{,}4)/2 - 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}3+0{,}5)/2 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}3+0{,}4)/2 = {,}00\,8$.

$\xi(x)$

$1/2$

t

0 t $1/2$ $t+1/2$ x

FIGURA 3.1: Puntos de $[0,1]$ con imágenes a través de ξ en $(-\infty, t]$.

- $P\left([0{,}2,0{,}6]^2 \cup [0{,}4,0{,}8]^2\right) = P\left([0{,}2,0{,}6]^2\right) + P\left([0{,}4,0{,}8]^2\right)$ $-P\left([0{,}2,0{,}6]^2 \cap [0{,}4,0{,}8]^2\right) = P\left([0{,}2,0{,}6]^2\right) + P\left([0{,}4,0{,}8]^2\right)$ $-P\left([0{,}4,0{,}6]^2\right) = 0{,}6^2 \cdot (0{,}6+0{,}6)/2 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}2+0{,}6) + 0{,}2^2 \cdot (0{,}2+0{,}2)/2 + 0{,}8^2 \cdot (0{,}8+0{,}8)/2 - 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}4+0{,}8) + 0{,}4^2 \cdot (0{,}4+0{,}4)/2 + 0{,}6^2 \cdot (0{,}6+0{,}6)/2 - 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}4+0{,}6) + 0{,}4^2 \cdot (0{,}4+0{,}4)/2 = 0{,}28$.
- $P(\{(x,y) : x+y \le 1\}) = P\left([0,1]^2\right)/2 = 1 \cdot 1 \cdot (1+1)/4 = 1/2$.

P3.6] Sea ξ una variable aleatoria definida sobre el intervalo $[0,1]$ como sigue:

$$\xi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 1/2 \\ x - 1/2 & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$$

Hallar la función de distribución de ξ y su función de densidad.

Solución

La función de distribución de una variable aleatoria viene dada por:

$$F_\xi(t) = P(\xi \le t) = P(\{x \in [0,1] : \xi(x) \le t\}).$$

Teniendo en cuenta la definición de la variable aleatoria ξ, representada en la figura 3.1, conviene distinguir varios casos:

- Si $t < 0$, entonces $F_\xi(t) = P(\phi) = 0$.
- Si $0 \le t < 1/2$, entonces $F_\xi(t) = P([0,t] \cup [1/2, t+1/2]) = 2t$.
- Si $t \ge 1/2$, entonces $F_\xi(t) = 1$

Por lo tanto, se tiene que:

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 2t, & \text{si } 0 \le t < 1/2 \\ 0, & \text{si } t \ge 1/2. \end{cases}$$

y por lo tanto:

$$f_\xi(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 2, & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ 1, & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases}$$

P3.7] Un dado es lanzado 5 veces. Sea ξ la variable aleatoria que nos indica la suma de los valores de sus caras. Hallar los siguientes conjuntos: $\{w : \xi(w) = 4\}$; $\{w : \xi(w) = 6\}$; $\{w : \xi(w) = 30\}$; $\{w : \xi(w) \geq 29\}$.

Solución

Antes de hallar los conjuntos que se piden, es conveniente definir un espacio para la variable que se va a utilizar. Definamos:

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) : w_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \forall i = 1, \ldots, 5\},$$

donde cada w_i representa el resultado del i-ésimo lanzamiento del dado, con $i = 1, \ldots, 5$. Sea el espacio de probabilidad $\left(\Omega, 2^\Omega, P\right)$, cuyos sucesos elementales son equiprobables. Sobre dicho espacio se considera la variable ξ, definida como:

$$\xi(w) = \sum_{i=1}^{5} w_i,$$

para todo $w \in \Omega$. Hallemos los conjuntos que se piden:

- Evidentemente, $\{w : \xi(w) = 4\} = \phi$.
- $\{w : \xi(w) = 6\} = \left\{w^1, w^2, w^3, w^4, w^5\right\}$, donde los elementos

  $$w^k = \left(w_1^k, w_2^k, w_3^k, w_4^k, w_5^k\right), \qquad k = 1, \ldots, 5,$$

  son aquellos elementos de Ω tales que $w_i^k = 1$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{k\}$ y $w_k^k = 2$.
- $\{w : \xi(w) = 30\} = \{(6, 6, 6, 6, 6)\}$.
- $\{w : \xi(w) \geq 29\} = \{w : \xi(w) = 29\} \cup \{w : \xi(w) = 30\}$, donde

  $$\{w : \xi(w) = 30\} = \{(6, 6, 6, 6, 6)\}$$

  y

  $$\{w : \xi(w) = 29\} = \left\{w^1, w^2, w^3, w^4, w^5\right\}.$$

  Los elementos

  $$w^k = \left(w_1^k, w_2^k, w_3^k, w_4^k, w_5^k\right), \qquad k = 1, \ldots, 5,$$

  son aquellos elementos de Ω tales que: $w_i^k = 6$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{k\}$ y $w_k^k = 5$.

P3.8] Supongamos que la duración en minutos de las llamadas telefónicas sigue una distribución dada por la función

$$F_\xi(x) = 1 - \left(\frac{e^{-x/3}}{2}\right) - \left(\frac{e^{-\lfloor x/3 \rfloor}}{2}\right), \quad \text{para todo } x \geq 0.$$

Calcular la probabilidad de que la duración de una llamada cualquiera sea:

1. superior a 6 minutos;
2. igual a 6 minutos.

Solución

Sea ξ una variable aleatoria con la distribución indicada en el enunciado que mide la duración (en minutos) de una llamada telefónica.

1. Se tiene que:

$$P(\xi > 6) = 1 - F_\xi(6) = \frac{e^{-6/3}}{2} + \frac{e^{-\lfloor 6/3 \rfloor}}{2} = 2 \cdot \frac{e^{-2}}{2} = e^{-2}.$$

2. Por otra parte:

$$\begin{aligned} P(\xi = 6) &= P(\xi \leq 6) - P(\xi < 6) = F_\xi(6) - F_\xi\left(6^-\right) = \\ &= 1 - e^{-2} - \lim_{x \to 6^-} \left[1 - \frac{e^{-x/3}}{2} - \frac{e^{-\lfloor x/3 \rfloor}}{2}\right] = \\ &= 1 - e^{-2} - 1 + \frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{2}. \end{aligned}$$

P3.9] Demostrar que $F(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} 1/2^n$, para todo $x \geq 1$, es función de distribución.

Solución

Comprobemos las condiciones que debe verificar toda función de distribución:

1. Se supone, ya que no se indica nada al respecto, que $F(x) = 0$ para todo $x < 1$, por lo que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

2. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} 1/2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1.$

3. $\lim_{h\to 0^+} F(x+h) = \lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{\lfloor x+h\rfloor} 1/2^n = \sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor} 1/2^n = F(x)$, para todo $x \geq 1$. Por lo tanto, F es continua por la derecha en todo punto de la recta real.
4. $F(x_1) = \sum_{n=1}^{\lfloor x_1\rfloor} 1/2^n \leq F(x_2) = \sum_{n=1}^{\lfloor x_2\rfloor} 1/2^n$, para todo $1 \leq x_1 \leq x_2$. Además, ya que $F(x) = 0$, para todo $x < 1$, se concluye que F es monótona.
5. Es claro que $F(x) \geq 0$, para todo x.

P3.10] Determinar el valor k para que cada una de las siguientes funciones sean función de densidad:

1. $f(x) = kxe^{-kx}$, para todo $x > 0$
2. $f(x) = k/\sqrt{1-x}$, para todo $x \in (0, \sqrt{2}/2)$
3. $f(x) = k/(1+x^2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

Solución

Nótese que para las tres funciones se verifica $f(x) \geq 0$ para $k > 0$. Comprobemos en cada caso la segunda condición.

1. $\int_0^{\infty} f(x)\,\partial x = \int_0^{\infty} kxe^{-kx}\partial x = 1/k\cdot\Gamma(2) = 1/k$, lo que es 1 si $k = 1$.
2. $\int_0^{\sqrt{2}/2} f(x)\,\partial x = \int_0^{\sqrt{2}/2} k(1-x)^{-1/2}\partial x$
$= k \cdot \left[-\left(1-\sqrt{2}/2\right)^{1/2} / (1/2) + 2\right]$, lo que es uno si $k = 1.0898$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\partial x = \int_{-\infty}^{+\infty} k(1+x^2)^{-1}\partial x$
$= k \cdot (\arctan(-\infty) - \arctan(+\infty)) = k\,[\pi/2 - (-\pi/2)] = k\pi$, lo que es 1 si $k = 1/\pi$.

P3.11] Sea ξ una variable aleatoria con función de densidad $f_\xi(x) = kx + 1/2$, para todo $x \in [-1, 1]$.

1. Determinar los valores de k para los cuales $f_\xi(x)$ es ciertamente una función de densidad.
2. Calcular la esperanza, la moda y la mediana de ξ.
3. ¿Para qué valores de k se minimiza la varianza de ξ?

Solución

1. Debe verificarse que $f_\xi(x) \geq 0$, para todo $x \in [-1, 1]$. Se han de distinguir dos casos:
   a) Si $k > 0$, la función de densidad es una recta con pendiente positiva. Por lo tanto, tiene que imponerse que $f_\xi(-1) = -k + 1/2 \geq 0$, es decir, $k \leq 1/2$.

b) Si $k < 0$, la recta tiene ahora pendiente negativa, por lo que es necesario que $f_\xi(1) = k + 1/2 \geq 0$, luego $k \geq -1/2$.

Se comprueba además que $\int_{-1}^{1} f_\xi(x) \cdot \partial x = 1$, para cualquier valor de k, así que, de acuerdo con esto y lo visto anteriormente, para que $f_\xi(x)$ sea función de densidad, k debe pertenecer al intervalo $[-1/2, 1/2]$.

2. Calculemos la esperanza de la variable ξ:

$$E[\xi] = \int_{-1}^{1} x \cdot f_\xi(x) \cdot \partial x = \int_{-1}^{1} x \cdot (kx + 1/2) \cdot \partial x = \frac{2k}{3}.$$

Por otra parte, para calcular la moda debemos tener en cuenta, al igual que en el primer apartado, el signo de la constante k. La moda es el valor que maximiza la función de densidad $f_\xi(x)$. Ya que ésta es una función derivable en el intervalo $[-1, 1]$, y además su derivada es igual a k, se obtiene que:

a) Si $k > 0$, entonces la moda de la variable ξ es 1.
b) Si $k = 0$, la moda es cualquier punto en el intervalo $[-1, 1]$.
c) Si $k < 0$, la moda es -1.

Por otra parte, la mediana es un valor Me tal que $P(\xi \geq Me) \geq 1/2$ y $P(\xi \leq Me) \leq 1/2$. En el caso que nos ocupa:

$$P(\xi \geq Me) = \int_{Me}^{1} f_\xi(x) \cdot \partial x = \int_{Me}^{1} (kx + 1/2) \cdot \partial x$$

$$= \frac{k}{2} + \frac{1}{2} - k \cdot \frac{(Me)^2}{2} - \frac{Me}{2},$$

y esta probabilidad es igual a $1/2$ si $Me = \left(-1 + \sqrt{1 + 4k^2}\right)/2k$, en el caso de que $k \neq 0$. Nótese que si $k = 0$, entonces $Me = 0$.

3. La varianza de la variable ξ es $V(\xi) = E\left[\xi^2\right] - (E[\xi])^2$. Se tiene que

$$E\left[\xi^2\right] = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot f_\xi(x) \cdot \partial x = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \left(kx + \frac{1}{2}\right) \cdot \partial x = \frac{1}{3}.$$

De este modo, y conociendo, por el segundo apartado del problema, que $E[\xi] = 2k/3$, obtenemos que:

$$V(\xi) = \frac{1}{3} - \left(\frac{2k}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{4k^2}{9},$$

y se comprueba que esto se maximiza cuando $k = 0$.

P3.12] La densidad de cierta característica química de algunos compuestos viene dada por la función siguiente:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ 2x & 0<x\leq 0{,}8 \\ 0{,}72 & 0{,}8<x\leq 1{,}3 \\ 0 & x>1{,}3 \end{cases}$$

Calcular:

1. los tres primeros momentos ordinarios;
2. esperanza matemática y varianza;
3. $E[2\xi+5\xi^2-\xi^3]$.

Solución

1. Los tres primeros momentos ordinarios son $E\left[\xi\right], E\left[\xi^2\right]$ y $E\left[\xi^3\right]$.
   - $E\left[\xi\right]=\int_0^{0,8}2x^2\cdot\partial x+\int_{0,8}^{1,3}0{,}72x\cdot\partial x=0.71933.$
   - $E\left[\xi^2\right]=\int_0^{0,8}2x^3\cdot\partial x+\int_{0,8}^{1,3}0{,}72x^2\cdot\partial x=0.6092.$
   - $E\left[\xi^3\right]=\int_0^{0,8}2x^4\cdot\partial x+\int_{0,8}^{1,3}0{,}72x^3\cdot\partial x=0.57144.$
2. Calculamos la varianza y se obtiene:

$$V\left(\xi\right)=E\left[\xi^2\right]-\left(E\left[\xi\right]\right)^2=0{,}6092-\left(0.71933\right)^2=9.1764\cdot 10^{-2}.$$

3. Teniendo en cuenta las propiedades de la esperanza, el resultado es:

$$E[2\xi+5\xi^2-\xi^3]=2\cdot E[\xi]+5\cdot E[\xi^2]-E[\xi^3]=3{,}9132.$$

P3.13] La función de densidad de una variable aleatoria ξ viene determinada por:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} \frac{1}{16}xe^{-x/4}, & x>0 \\ \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

1. Determinar la función generatriz de momentos de ξ.
2. Utilizar (1) para encontrar la media y la varianza de ξ.

Solución

1. La función generatriz de momentos de una variable aleatoria es:

$$G_\xi(t)=E\left[e^{t\xi}\right]=\int_0^\infty e^{-tx}\cdot\frac{x}{16}\cdot e^{-x/4}\cdot\partial x=$$

   Para $t<1/4$ es:

$$G_\xi(t)=\frac{1}{16}e^{x(t-1/4)}\left[\frac{x}{t-1/4}-\frac{1}{(t-1/4)^2}\right]_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{1}{\left(1-4t\right)^2}.$$

2. Se verifica que:

$$\frac{\partial G_\xi}{\partial t}(t) \quad | \quad _{t=0} = E[\xi],$$
$$\frac{\partial^2 G_\xi}{\partial t^2}(t) \quad | \quad _{t=0} = E[\xi^2].$$

Por lo tanto, la media y la varianza de la variable ξ son:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= 8, \\ V(\xi) &= E[\xi^2] - (E[\xi])^2 = 96 - 64 = 32. \end{aligned}$$

P3.14] Bajo las tapas de yogur de una determinada marca comercial hay 6 tipos diferentes de símbolos. Bajo cada tapa hay exactamente uno, y se asume que en el mercado todos han sido distribuidos aleatoriamente de manera uniforme. Si nos ofrecen un premio regalo por enviar un sobre con los 6 símbolos diferentes (una tapa con cada uno), ¿cuántos yogures hay que comprar en media?

Solución

En general, si un símbolo determinado aparece con probabilidad p al realizar una extracción, entonces el número medio de extracciones necesario hasta que aparece por primera vez ese símbolo es:

$$m = 1 \cdot p + 2 \cdot (1-p) \cdot p + 3 \cdot (1-p)^2 \cdot p + \ldots$$

Para sumar esta serie nótese que:

$$(1-p) \cdot m = (1-p) \cdot p + 2 \cdot (1-p)^2 \cdot p + 3 \cdot (1-p)^3 \cdot p + \ldots,$$

y restando ambas series:

$$m - (1-p) \cdot m = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

y por tanto $m = 1/p$. Dicho esto, volvamos a nuestro problema original. Evidentemente, el número medio de extracciones hasta que aparezca un resultado cualquiera es 1. En el caso de dos, este número es $1 + 1/(5/6) = 1 + 6/5$, y, en general, el número medio de extracciones hasta que aparezcan n símbolos distintos ($n = 1, \ldots, 6$) es

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{6-i+1}{6}}.$$

Por lo tanto, hay que comprar una media de

$$6 \cdot (1/6 + 1/5 + 1/4 + 1/3 + 1/2 + 1) = 14{,}7$$

yogures para conseguir los seis símbolos distintos.

P3.15] Una caja contiene dos monedas legales y una con dos caras. Se selecciona una moneda al azar.

1. Si se lanza la moneda y sale cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda sea legal? ¿Y si en otros tres lanzamientos vuelve a salir cara?
2. Se selecciona una moneda, se lanza y se devuelve a la caja. ¿Cuál será el número medio de veces que tendremos que repetir el proceso hasta que se obtenga una cruz?

Solución:

Un espacio muestral para este problema es

$$\Omega = \left\{ w = (m, w_1, w_2, w_3, w_4) : \begin{array}{l} m \in \{l_1, l_2, \bar{l}\} \\ w_i \in \{C, X\}, \text{ para todo } i = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right\},$$

donde m representa la moneda escogida al azar. Denotamos por l_1 y l_2 a las dos monedas legales y por l a la moneda con dos caras. Por otra parte, cada w_i es el resultado del i- ésimo lanzamiento, para $i = 1, 2, 3, 4$, siendo C si es “cara”y X si es “cruz”.

1. Sean los sucesos $A =$ “La moneda escogida es legal”y $B_i =$ “El i-ésimo lanzamiento de la moneda es cara”, para $i = 1, 2, 3, 4$. Si se lanza una moneda escogida al azar y sale cara, la probabilidad de que la moneda sea legal es:

$$\begin{aligned} P(A|B_1) &= P(B_1|A) \cdot P(A) / P(B_1) = \\ &= \frac{P(B_1|A) \cdot P(A)}{P(B_1|A) \cdot P(A) + P(B_1|A^c) \cdot P(A^c)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La probabilidad de que la moneda sea legal conociendo lo anterior y que además en otros tres lanzamientos vuelve a salir cara, es, teniendo en cuenta que todos los lanzamientos efectuados con la moneda son independientes entre sí:

$$\begin{aligned} P\left(A|\bigcap_{i=1}^{4} B_i\right) &= \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{4} B_i|A\right) \cdot P(A)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{4} B_i\right)} = \\ &= \frac{\left[\prod_{i=1}^{4} P(B_i|A)\right] \cdot P(A)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{4} B_i|A\right) \cdot P(A) + P\left(\bigcap_{i=1}^{4} B_i|A^c\right) \cdot P(A^c)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\left[\prod_{i=1}^{4} P(B_i|A)\right] \cdot P(A)}{\prod_{i=1}^{4} P(B_i|A) \cdot P(A) + \prod_{i=1}^{4} P(B_i|A^c) \cdot P(A^c)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + 1^4 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{9}.$$

2. Definimos el espacio muestral

$$\Omega = \left\{ w = (w_1, \ldots, w_k) : \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots \\ w_i = (w_{i1}, w_{i2}) \\ w_{i1} \in \left\{l_1, l_2, \bar{l}\right\}, w_{i2} = C \\ \qquad \text{para todo } i = 1, \ldots, k-1 \\ w_{k1} \in \{l_1, l_2\}, w_{k2} = X \end{array} \right\},$$

donde w_{i1} es la moneda escogida al repetir el proceso por i- ésima vez, para $i \neq k$ y w_{k1} es la moneda con la que sale una cruz y detenemos el proceso, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Nótese que esta última moneda debe ser legal, pues debe dar una cruz, y que, por otra parte, las $k-1$ primeras tiradas deben ser cara, para que se necesite continuar el proceso. Sobre este espacio definimos la variable aleatoria ξ que representa el número de veces que hay que repetir el proceso hasta que sale cruz, incluyendo el último lanzamiento.

Sean D_i los sucesos "En el i- ésimo lanzamiento sale una cara"y $E_i =$ "En el i- ésimo lanzamiento sale una cruz", para $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Sean también $L_i =$ "La moneda del i- ésimo lanzamiento es legal"y $\overline{L}_i =$ "La moneda del i -ésimo lanzamiento no es legal". Usando los sucesos definidos en el apartado anterior, se tiene que:

$$P(\xi = k) = P(\{w \in \Omega : \xi(w) = k\}) = \left[\prod_{i=1}^{k-1} P(D_i)\right] \cdot P(E_k),$$

donde

$$P(D_i) = P(D_i|L_i) \cdot P(L_i) + P\left(D_i|\overline{L}_i\right) \cdot P\left(\overline{L}_i\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, k-1$, y

$$P(E_k) = P(E_k|L_k) \cdot P(L_k) + P\left(E_k|\overline{L}_k\right) \cdot P\left(\overline{L}_k\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

pues la moneda del último lanzamiento debe ser legal para que pueda salir una cruz. Por lo tanto:

$$P(\xi = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3},$$

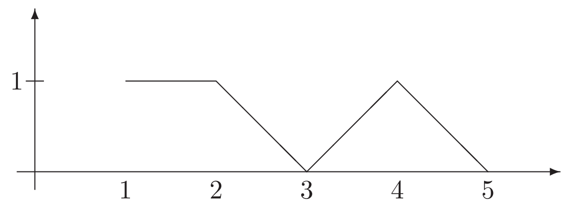

FIGURA 3.2: Ejemplo para el ejercicio P3.16 con $n = 2$ y $m = 3$.

luego, el número medio de lanzamientos hasta que salga cruz es

$$E[\xi] = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 3.$$

P3.16] Consideremos líneas que unen $n + m$ puntos del plano

$$(1, x_1), (2, x_2), \ldots, (n + m, x_{n+m}),$$

donde los valores $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}$ son n ceros y m unos distribuidos de forma totalmente aleatoria. Por ejemplo, para $n = 2$ y $m = 3$, la figura 3.2 muestra una recta con 3 saltos. ¿Cuál es el número medio de saltos de una línea?

Solución

Dado que la media de una suma es siempre la suma de las medias, entonces lo pedido se limita a calcular la probabilidad de que entre dos puntos consecutivos haya un salto, y multiplicar dicho valor por el número de puntos consecutivos (parejas de puntos) que hay. Mientras que el segundo valor es claramente $n + m - 1$, el primero es

$$\frac{n}{n+m} \cdot \frac{m}{n+m-1} + \frac{m}{n+m} \cdot \frac{n}{n+m-1}.$$

Para calcular este último valor se ha tenido presente que hay dos probabilidades disjuntas: o salto de 0 a 1, o salto de 1 a 0. Además, la probabilidad de que haya un 0 en el primer punto de la pareja es $n/(n + m)$, y luego la probabilidad de que haya un 1 en el segundo es $m/(n + m - 1)$. Análogamente, la probabilidad de que haya un 1 en el primer punto es $m/(n + m)$, y de que haya un 0 en el segundo es $n/(n + m - 1)$.

Como conclusión, el número medio solicitado es

$$(n + m - 1) \cdot \left[\frac{n}{n+m} \cdot \frac{m}{n+m-1} + \frac{m}{n+m} \cdot \frac{n}{n+m-1}\right] = \frac{2nm}{m+n}.$$

Como se observa en este ejemplo, no siempre el mejor camino para calcular la media de una variable aleatoria consiste en pasar primero por el cálculo de su distribución de probabilidad, ya que en algunos problemas (como éste) tal distribución puede ser difícil de obtener, mientras que la media es fácil.

P3.17] Un jugador comienza un juego de azar con k euros. En cada partida el juego le permite ganar o perder 1 euro, independientemente de lo que tenga, hasta que no tenga nada. La probabilidad de ganar el euro de cada partida es p y la de perder el euro es $1-p$. ¿Qué probabilidad hay de que lo pierda todo alguna vez?

Solución

Si P_k representa la probabilidad buscada, entonces

$$P_k = (1-p)\,P_{k-1} + pP_{k+1},$$

donde se asume $P_0 = 1$. Así, por ejemplo:

$$P_1 = 1 - p + pP_2,$$

y puesto que $P_2 = P_1^2$, ya que perder 2 euros es perder primero uno y luego otro de forma independiente, entonces:

$$P_1 = 1 - p + pP_1^2,$$

por lo que, o bien $P_1 = 1$, ó $P_1 = (1-p)/p$, ya que éstas son las dos soluciones de la ecuación cuadrática anterior. Ahora bien, si $p < 1/2$ entonces $P_1 = 1$ y si $p \geq 1/2$ entonces $P_1 = (1-p)/p$.

De igual forma se concluye que

$$\begin{array}{lll} P_k = \left(\frac{1-p}{p}\right)^m & , \text{si} & p > 1/2 \\ P_k = 1 & , \text{si} & p \leq 1/2 \end{array}$$

P3.18] Un jugador A tiene m euros y otro B tiene n euros. En cada partida un jugador gana 1 euro y el otro pierde 1 euro. La probabilidad de que A gane una partida es p y la de que gane B es $1-p$. El juego continúa hasta que uno pierda todo. ¿Qué probabilidad tiene A de perder?

Solución

Observemos que plantear este problema es equivalente al problema anterior cuando uno de los jugadores (B) tiene un enorme capital ($n \to +\infty$), y que en tal caso la probabilidad de que A pierda es $[(1-p)/p]^m$, si $p > 1/2$.

Cuando n es finito, la situación cambia, pero el problema se puede resolver de forma análoga porque, si Q_m representa la probabilidad que tiene A de pasar de m a Q, sin haber alcanzado nunca $n+m$, entonces:

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^m = Q_m + (1-Q_m) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}.$$

Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$Q_m = 1 - \frac{1-[(1-p)/p]^m}{1-[(1-p)/p]^{m+n}},$$

siempre que $p > 1/2$.

Cuando $p = 1/2$, la expresión anterior es la indeterminación $0/0$, que se resuelve aplicando la regla de L'Hospital, obteniéndose

$$Q_m = n/(n+m).$$

P3.19] En una elección hay dos candidatos, y en la urna de votación hay n papeletas a favor de uno y m a favor del otro, con $n > m$. Si se asume que los votos en la urna han sido suficientemente mezclados, ¿qué probabilidad hay de de que al menos suceda un empate durante el conteo de los votos?

Solución

Es importante observar que, por cada sucesión que produzca un empate comenzando con un candidato, existe otra secuencia que lleva también a empate y comienza con el otro candidato. En efecto, si representamos por N y M a los dos candidatos, entonces una secuencia tal como

$$NNMNNMMM$$

tiene asociada otra secuencia que da empate y que comienza en M:

$$MMNMMNNN.$$

La correspondencia consiste sólo en cambiar las letras.

Esta importante observación demuestra que el número de casos favorables que comienzan con un candidato es igual al número de casos favorables que comienzan con el otro candidato. O, dicho en otras palabras, que la probabilidad de que exista al menos un empate es el doble de la probabilidad de que haya empate empezando por el candidato M. Ahora bien, esta última probabilidad es simplemente la probabilidad de que el primer voto sea de M, ya que luego es seguro que habrá empate porque $n > m$. Consecuentemente la probabilidad buscada es:

$$2 \cdot \frac{m}{n+m}.$$

FIGURA 3.3: Esfera que circunscribe los bordes de la moneda.

P3.20] ¿Cuán gruesa debe de ser una moneda para que tenga probabilidad 1/3 de caer de canto?

Solución

Evidentemente, si tenemos presentes las características físicas de los materiales, es decir, la elasticidad de la moneda, la fuerza y dirección con que se lanza, las características de la superficie sobre la que cae, etc., entonces este problema no está matemáticamente bien definido y su respuesta debe proceder más de experimentos físicos que de la Teoría de Probabilidades. Sin embargo, para dar una respuesta con esta segunda herramienta, asumamos las siguientes hipótesis: veamos la moneda como la esfera circunscrita por sus dos bordes circulares (véase figura 3.3), y entendamos que la moneda "cae de canto" cuando el polo inferior de la esfera está entre los dos círculos (véase figura 3.4). Con esta notación es claro que el problema pide la distancia que debe separar a los dos círculos para que el área sobre la esfera que limitan sus dos círculos sea la mitad del área restante.

Dada la simetría, concentrémonos en una sección de la esfera. Por ejemplo, en su sección central (figura 3.5). Para que la longitud de la circunferencia entre un canto sea la mitad de la longitud de la circunferencia entre un lado, debe cumplirse que $\alpha = 2\pi/6$. Puesto que $\mathsf{tan}\alpha = r/g$ con r el radio de la moneda y g la mitad de su grueso, entonces

$$g = \frac{r}{\mathsf{arctan}\,(\pi/3)} = 0{,}354r.$$

En otras palabras, el grueso de la moneda debe ser 35.4 % el diámetro de la moneda para que tenga probabilidad 1/3 de caer de canto.

suelo

FIGURA 3.4: Moneda cayendo de canto.

r

α

g

FIGURA 3.5: Sección central de la esfera.

FIGURA 3.6: Transformación de variables aleatorias.

P3.21] Dos de los lados de un triángulo isósceles tienen una longitud L cada uno y el ángulo x entre ellos es el valor de una variable aleatoria ξ con función de densidad proporcional a $x(\pi - x)$ en cada punto $x \in (0, \pi/2)$. Calcular la función de densidad del área del triángulo y su esperanza.

Solución

Consideremos un espacio muestral Ω donde los sucesos elementales w que lo configuran son los triángulos isóceles cuyos dos lados iguales miden L, y se distinguen por el ángulo que ambos forman. Sobre el espacio muestral Ω se asume una probabilidad P. Sea ξ la variable que mide dicho ángulo. Entonces en el enunciado nos informan que se trata de una variable aleatoria sobre Ω con función de densidad:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} kx(\pi - x), & x \in (0, \pi/2) \\ 0, & \text{para cualquier otro valor,} \end{cases}$$

donde k debe ser una constante tal que se verifica que:

$$\begin{aligned} f_\xi(x) &\geq 0, \text{ para todo } x, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\, \partial x &= 1. \end{aligned}$$

De estas dos condiciones resulta que k es igual a $12/\pi^3$.

Definamos ahora una segunda variable η que mide el área de cada triángulo en Ω. Esta variable es claramente obtenible a partir de la variable ξ. En efecto, conociendo el ángulo x entre los dos lados de triángulo w, se tiene que su base es $2L\textsf{sen}\,(x/2)$ y su altura es $L\textsf{cos}\,(x/2)$. Por tanto, el área y de un triángulo con ángulo x es

$$y = g(x) = \frac{2L\textsf{sen}\,(x/2) \cdot L\textsf{cos}\,(x/2)}{2} = \frac{L^2\textsf{sen}(2x/2)}{2} = \frac{L^2\textsf{sen}x}{2}.$$

Es decir, la variable η se calcula totalmente componiendo ξ con la función g según la expresión (véase la figura 3.6):

$$\eta = g \circ \xi = \frac{L^2\textsf{sen}\xi}{2}.$$

Una primera idea para calcular la función de densidad del área f_η es la de comenzar calculando su función de distribución F_η. Para esto consideremos cualquier valor $y \in I\!R$:

$$F_\eta(y) = P\{w \in \Omega : \eta(w) \leq y\} = P\{w \in \Omega : g(\xi(w)) \leq y\}$$

Claramente, si $y \leq 0$ entonces $F_\eta(y) = 0$, mientras que si $y \geq L^2/2$ entonces $F_\eta(y) = 1$. Sólo nos queda ver cómo queda $F_\eta(y)$ cuando $0 \leq y \leq L^2/2$, y para ello sustituyamos el valor de la función g en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} F_\eta(y) &= P\left\{w \in \Omega : \frac{L^2 \mathsf{sen}(\xi(w))}{2} \leq y\right\} \\ &= P\left\{w \in \Omega : \xi(w) \leq \mathsf{arcsen}\left(\frac{2y}{L^2}\right)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\mathsf{arcsen}\left(\frac{2y}{L^2}\right)} f_\xi(x)\partial x = \int_0^{\mathsf{arcsen}\left(\frac{2y}{L^2}\right)} \frac{12}{\pi^3} x(\pi - x)\partial x. \end{aligned}$$

Resolviendo esta integral se obtiene la función de distribución de η. Luego derivando en y se concluye su función de densidad:

$$f_\eta(y) = \frac{12}{\pi^3} \cdot \mathsf{arcsen}\left(\frac{2y}{L^2}\right) \cdot \left(\pi - \mathsf{arcsen}\left(\frac{2y}{L^2}\right)\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{L^4 - 4y^2}}.$$

para $y \in \big(0, L^2/2\big)$, y 0 en otro caso.

Obviamente, también es posible realizar un cálculo directo de la función de densidad de $\eta = g \circ \xi$ conociendo la fórmula general que acorta el proceso:

$$h_\eta(y) = f_\xi(g^{-1}(y)) \cdot \left|\left(g^{-1}\right)'(y)\right|$$

Finalmente, la esperanza de la variable η se puede calcular o bien directamente aprovechando que hemos calculado su función de densidad:

$$E[\eta] = \int_0^{L^2/2} f_\eta(y)\partial y$$

o indirectamente usando que $\eta = g \circ \xi$:

$$E[\eta] = \int_0^{\pi/2} g(x) \cdot f_\xi(x) \cdot \partial x = \int_0^{\pi/2} \frac{L^2 \mathsf{sen} x}{2} \cdot \frac{12}{\pi^3} \cdot x \cdot (\pi - x) \cdot \partial x = \frac{12L^2}{\pi^3}.$$

P3.22] En función de un estudio realizado en varios establecimientos, se conoce que la demanda ξ de determinado producto es una variable aleatoria con función de densidad $f_\xi(x) = e^{-x}$, cuando $x > 0$. La venta de una cantidad

x produce una ganancia de ax y el sobrante y no vendido produce una pérdida by, con a y b constantes positivas. Calcular la cantidad conveniente de aprovisionamiento para que la ganancia esperada sea máxima. Aplíquese al caso particular de $a = 1$ y $b = 2$.

Solución

Sea c la cantidad de aprovisionamiento. Para una demanda x, la ganancia $g(x)$ viene definida por:

$$g(x) = \begin{cases} ax - b(c-x) & , 0 \leq x < c \\ ac & , x \geq c \end{cases} .$$

A partir de esto se tiene la variable aleatoria ganancia $\eta = g \circ \xi$(véase la figura 3.6), resultando:

$$\begin{aligned} E[\eta] &= E[g \circ \xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x) \partial x = \\ &= \int_0^c (ax - b(c-x)) e^{-x} \partial x + \int_c^\infty ace^{-x} \partial x = \\ &= -(a+b) ce^{-c} + (a+b-bc) \left(1 - e^{-c}\right) + ace^{-c} \end{aligned}$$

El valor de c que maximiza la ganancia esperada se obtiene derivando la expresión anterior respecto de c, resultando que $c = \ln(1 + a/b)$.

En el caso particular $a = 1, b = 2$ se tiene que $c = \ln(3/2)$.

P3.23] Se dispone de 7 huchas, cada una con 10 billetes de 1000 pts., 6 billetes de 2000 pts., 4 billetes de 5000 pts. y 1 billete de 10000 pts. Nos dan 7 billetes, extraídos aleatoriamente uno de cada hucha.

1. ¿Cuál es el número esperado de pesetas que recibimos?
2. ¿Qué probabilidad hay de recibir 17000 pesetas? (Ayuda: calcular la función generatriz de probabilidades).

Solución

Consideremos como espacio muestral el conjunto de 7- uplas de billetes, uno procedente de cada urna. Además, sea ξ_i una variable aleatoria que representa el valor (en miles de pesetas) de un billete extraído de la hucha i- ésima. Esta variable puede tomar los valores 1, 2, 5 y 10 con probabilidades $P(\xi_i = 1) = 10/21$, $P(\xi_i = 2) = 6/21$, $P(\xi_i = 5) = 4/21$ y $P(\xi_i = 10) = 1/21, i = 1, \ldots, 7$, respectivamente. Suponiendo que las 7 huchas de las que se dispone son independientes (en cuanto al resultado de una extracción), sea $\eta = \sum_{i=1}^{7} \xi_i$ la variable aleatoria que representa el valor total de los billetes extraídos

1. El número esperado de pesetas (en miles) recibidas es:

$$E[\eta] = E\left[\sum_{i=1}^{7} \xi_i\right] = \sum_{i=1}^{7} E[\xi_i]$$

$$= \frac{7}{21} \cdot (10 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 10) = 17.333.$$

2. Para calcular $P(\eta = 17)$ usando la función generatriz de probabilidades

$$\phi_\eta(t) = E[t^\eta],$$

sucede que:

$$\left.\phi_\eta^{(k)}(t)\right|_{t=0} = k! \cdot P(\eta = k).$$

En el caso de este problema, esta función es:

$$\phi_\eta(t) = E\left[t^{\sum_{i=1}^{7} \xi_i}\right] = \prod_{i=1}^{7} E\left[t^{\xi_i}\right] = \left(E\left[t^{\xi}\right]\right)^7 =$$

$$\left(\frac{1}{21}\right)^7 \cdot \left(t^1 \cdot 10 + t^2 \cdot 6 + t^5 \cdot 4 + t^{10} \cdot 1\right)^7.$$

Queda pendiente calcular la derivada 17-ésima, evaluarla en $t = 0$ y dividirla por 17!.

CAPÍTULO 4

Principales variables aleatorias

- Entre las variables aleatorias discretas destacan:

Variable Aleatoria Uniforme: Dado un número natural n, se llama *variable aleatoria uniforme* ξ y se denota por $\xi \sim U[n]$ a una variable que toma valores en $\{1, 2, \dots, n\}$, cada uno con igual probabilidad. Es decir, es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad:

$$P_\xi(k) = \begin{cases} 1/n & \text{, si} \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \\ 0 & \text{, resto} \end{cases}$$

Algunas características son:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= (n+1)/2 \\ V(\xi) &= \left(n^2 - 1\right)/12 \\ \phi_\xi(t) &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} t^k \\ G_\xi(t) &= \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{tn} - 1}{1 - e^{-t}} \\ \varphi_\xi(t) &= \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{itn} - 1}{1 - e^{-it}} \end{aligned}$$

Variable Aleatoria de Bernoulli: Dado $p \in [0, 1]$, se llama *variable aleatoria de Bernoulli* de parámetro p a una variable aleatoria que toma sólo dos valores posibles, uno con probabilidad p y el otro con probabilidad $1-p$. Los experimentos de este tipo se llaman "pruebas de Bernoulli", sus dos resultados se suelen denominar "éxito" y "fracaso" (o "blanco" y "negro",...), y la variable les asocia los valores 1 y 0, respectivamente. La función de probabilidad de esta variable es:

$$P_\xi(k) = \begin{cases} p & \text{, si} \quad k=1 \\ 1-p & \text{, si} \quad k=0 \end{cases}$$

Se denota por $\xi \sim B(p)$, y algunas características suyas son:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= p \\ V(\xi) &= p \cdot (1-p) \\ \phi_\xi(t) &= (1-p) + p \cdot t \\ G_\xi(t) &= (1-p) + p \cdot e^t \\ \varphi_\xi(t) &= (1-p) + p \cdot e^{i \cdot t} \end{aligned}$$

Variable Aleatoria Binomial: Dados dos números n y p, con n natural y p perteneciente al intervalo $[0,1]$, se llama *variable aleatoria Binomial* de parámetros n y p a una variable aleatoria que toma valores en $\{0,1,\ldots,n\}$ y tiene como función de probabilidad:

$$P_\xi(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \text{ para todo } k \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Se denota por $\xi \sim Bi(n,p)$, y representa una variable aleatoria que mide el número de veces que ocurre el suceso "éxito" en n pruebas de Bernoulli de parámetro p e independientes. Algunas características de esta distribución son:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= n \cdot p \\ V(\xi) &= n \cdot p \cdot (1-p) \\ \phi_\xi(t) &= (1-p+p \cdot t)^n \\ G_\xi(t) &= \left(1-p+p \cdot e^t\right)^n \\ \varphi_\xi(t) &= \left(1-p+p \cdot e^{i \cdot t}\right)^n \end{aligned}$$

Variable Aleatoria Hipergeométrica: Dados N, A y B números naturales, se llama *variable aleatoria Hipergeométrica* de parámetros (n,A,B) a una variable que trata de medir el número de "éxitos"(bolas azules, por ejemplo) cuando se extrae una muestra de tamaño n sin reemplazamiento, de una urna con $N = A+B$ bolas, de las que A son azules y el resto blancas. Esta distribución es análoga a la Binomial, pero se basa en un muestreo realizado sin reemplazamiento. Su función de probabilidad es:

$$P_\xi(k) = \frac{\binom{A}{k} \cdot \binom{B}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ para todo } k = 0, 1, \ldots, n,$$

y se denota por $\xi \sim H(n, A, B)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= n \cdot \frac{A}{N} \\ V(\xi) &= n \cdot \frac{A}{N} \cdot \frac{B}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}. \end{aligned}$$

Variable Aleatoria Binomial Negativa: Dados dos números n y p, con n natural y p perteneciente al intervalo $[0, 1]$, se llama *variable aleatoria Binomial Negativa* de parámetros n y p a una variable aleatoria que toma valores $k = 0, 1, \ldots$ y tiene como función de probabilidad:

$$P_\xi(k) = \binom{n+k-1}{k} \cdot p^n \cdot (1-p)^k, \text{ para todo } k = 0, 1, \ldots$$

Se denota por $\xi \sim BN(n, p)$, y representa una variable aleatoria que mide el número de fracasos que ocurren antes de obtener n éxitos con una secuencia de pruebas independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito p. Algunas características de esta distribución son:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \frac{n \cdot (1-p)}{p} \\ V(\xi) &= \frac{n \cdot (1-p)}{p^2} \\ \phi_\xi(t) &= \left(\frac{p}{1-(1-p) \cdot t} \right)^n, \text{ para } |t| < \frac{1}{1-p}. \\ G_\xi(t) &= \left(\frac{p}{1-(1-p) \cdot e^t} \right)^n, \text{ para } (1-p)\, e^t < 1. \\ \varphi_\xi(t) &= \left(\frac{p}{1-(1-p) \cdot e^{it}} \right)^n \end{aligned}$$

Variable Aleatoria de Poisson: Consideremos la variable que mide el número de sucesos que ocurren en un intervalo de amplitud fija, siendo λ el promedio de sucesos en dicho intervalo. Esta variable sigue una distribución de Poisson de parámetro λ, y se denota $\xi \sim P(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Su función de probabilidad es:

$$P_\xi(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ para } k = 0, 1, \ldots$$

Las principales características de esta distribución son:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \lambda \\ V(\xi) &= \lambda \\ \phi_\xi(t) &= e^{\lambda \cdot (t-1)} \\ G_\xi(t) &= e^{\lambda \cdot \left(e^t - 1\right)} \\ \varphi_\xi(t) &= e^{\lambda \cdot \left(e^{it} - 1\right)} \end{aligned}$$

La distribución de Poisson se obtiene también como límite de la distribución Binomial de parámetros n y λ/n cuando $n \to \infty$. Además, la suma de dos variables de Poisson independientes de parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente, es a su vez una Poisson de parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Variable Aleatoria Geométrica: Dado $p \in [0, 1]$, la variable aleatoria que cuenta el número de fracasos que preceden al primer éxito en una sucesión infinita de pruebas de Bernoulli sigue una distribución Geométrica de parámetro p, donde p es la probabilidad de éxito, y se denota $\xi \sim G(p)$. La función de probabilidad de esta variable es:

$$P_\xi(k) = p \cdot (1-p)^k \text{, con } k = 0, 1, \ldots$$

Además:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \frac{1-p}{p} \\ V(\xi) &= \frac{1-p}{p^2} \\ \phi_\xi(t) &= \frac{p}{1-(1-p) \cdot t}, \text{ para } |t| < \frac{1}{1-p}. \\ G_\xi(t) &= \frac{p}{1-(1-p) \cdot e^t}, \text{ para } (1-p) \cdot e^t < 1 \\ \varphi_\xi(t) &= \frac{p}{1-(1-p) \cdot e^{it}} \end{aligned}$$

Es importante destacar que la suma de variables independientes e idénticamente distribuidas según una Geométrica de parámetro p es una Binomial Negativa.

- Entre las variables aleatorias continuas destacan:

Variable Aleatoria Uniforme: Se llama *variable aleatoria Uniforme* en un intervalo $[a, b]$, con $a \leq b$ y $a, b \in I\!R$, y se denota por $\xi \sim U[a, b]$, a una variable aleatoria ξ con función de densidad

$$f_\xi(x) = \frac{1}{b-a}, \text{ para } a \leq x \leq b.$$

Sus principales características son:

$$\begin{aligned} E\left[\xi\right] &= \frac{a+b}{2}, \\ V\left(\xi\right) &= \frac{\left(b-a\right)^2}{12}, \\ G_\xi\left(t\right) &= \frac{e^{t\cdot b}-e^{t\cdot a}}{t\cdot\left(b-a\right)}, \text{ para } t\neq 0. \\ \varphi_\xi\left(t\right) &= \frac{e^{it\cdot b}-e^{it\cdot a}}{i\cdot t\cdot\left(b-a\right)}, \text{ para } t\neq 0. \end{aligned}$$

Variable Aleatoria Triangular: Dados dos parámetros a y b tales que $a<b$, se llama *variable aleatoria Triangular* de parámetros a y b y se denota por $T\left(a,b\right)$, a una variable aleatoria ξ cuya función de densidad viene descrita por:

$$f_\xi\left(x\right)=\begin{cases} \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} & \text{, si } a\leq x<\frac{a+b}{2} \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} & \text{, si } \frac{a+b}{2}\leq x<b \\ 0 & \text{, en el resto} \end{cases}$$

Claramente $E\left[\xi\right]=\left(a+b\right)/2$.

Variable Aleatoria Exponencial: Se llama *variable aleatoria Exponencial* con parámetro λ, con $\lambda>0$, y se denota por $\xi\sim Exp\left(\lambda\right)$, a una variable aleatoria ξ con función de densidad

$$f_\xi\left(x\right)=\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}, \text{ para } x>0.$$

Sus principales características son:

$$\begin{aligned} E\left[\xi\right] &= \frac{1}{\lambda}, \\ V\left(\xi\right) &= \frac{1}{\lambda^2}, \\ G_\xi\left(t\right) &= \frac{\lambda}{\lambda-t}, \text{ para } t<\lambda. \\ \varphi_\xi\left(t\right) &= \frac{\lambda}{\lambda-i\cdot t}. \end{aligned}$$

Esta variable aparece, por ejemplo, cuando se estudia la distancia entre dos sucesos consecutivos que sigan una distribución de Poisson.

Variable Aleatoria Gamma: Se llama *variable aleatoria Gamma* de parámetros a y p, con $a,p>0$, y se denota por $\xi\sim\Gamma\left(a,p\right)$, a una variable aleatoria ξ con función de densidad

$$f_\xi\left(x\right)=\frac{a^p}{\Gamma\left(p\right)}\cdot e^{-a\cdot x}\cdot x^{p-1}, \text{ para } x\geq 0.$$

Sus principales características son:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \frac{p}{a}, \\ V(\xi) &= \frac{p}{a^2}, \\ G_\xi(t) &= \left(\frac{a}{a-t}\right)^p, \text{ para } |t| < a. \\ \varphi_\xi(t) &= \left(\frac{a}{a-i\cdot t}\right)^p. \end{aligned}$$

Además, se verifica que la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Exponencial sigue una distribución Gamma. Por ello, la distribución Gamma es la que aparece cuando se estudia la distancia entre p sucesos que sigan una variable de Poisson de parámetro a.

Variable Aleatoria Normal: Se llama *variable aleatoria Normal* de media μ y varianza σ^2 y se denota por $\xi \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, a una variable aleatoria ξ con función de densidad:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}.$$

Sus principales características son:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \mu, \\ V(\xi) &= \sigma^2, \\ G_\xi(t) &= e^{t\cdot\mu+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot t^2}, \\ \varphi_\xi(t) &= e^{i\cdot t\cdot\mu-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot t^2}. \end{aligned}$$

Es importante destacar la importancia de la variable aleatoria con distribución $N(0,1)$, denominada "distribución normal tipificada".

Variable Aleatoria χ^2 de Pearson: Se llama así a la variable aleatoria resultante de sumar los cuadrados de d variables aleatorias independientes con distribución $N(0,1)$. Se dice que d $(d > 0)$ es el número de grados de libertad, y la variable se denota $\xi \sim \chi^2_d$. Su función de densidad es:

$$f_\xi(x) = \frac{2^{-d/2} \cdot x^{d/2-1} \cdot e^{-x/2}}{\Gamma(d/2)}$$

para todo $x > 0$. Su media es d y su varianza es $2d$. La función generatriz de momentos es:

$$G_\xi(t) = (1-2t)^{-d/2}, \text{ para } t < \frac{1}{2}.$$

Variable Aleatoria t de Student: La variable aleatoria ξ tiene distribución t de Student con d grados de libertad, y se denota $\xi \sim T_d$, si su función de densidad es:

$$f_\xi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\sqrt{d\pi}\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{d}\right)^{-\frac{d+1}{2}}$$

para todo x real. Su media es 0 y la varianza $d/(d-2)$. La función generatriz de momentos no existe. Además, el cociente entre una variable normal tipificada y una variable con distribución χ^2_d independientes tiene una distribución T_d.

Variable Aleatoria F de Fisher-Snedecor: La variable aleatoria ξ tiene distribución F de Fisher-Snedecor con n y m grados de libertad (n y m números naturales), si su función de densidad es:

$$f_\xi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right) n^{n/2} m^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{n/2-1}(m+nx)^{-(n+m)/2}$$

para todo x real. Se denota $\xi \sim F_{n,m}$, y su media es:

$$\frac{m}{(m-2)}, \text{ para } m > 2,$$

y su varianza:

$$\frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}, \text{ para } m > 4.$$

La función generatriz de momentos no existe. Además, el cociente entre dos variables aleatorias independientes con distribución χ^2, con n y m grados de libertad, respectivamente, es una $F_{n,m}$.

Ejercicios Resueltos

P4.1] Supongamos que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamblaje es de 0.05. Si el conjunto de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes

1. ¿cuál es la probabilidad de que entre diez unidades dos se encuentren defectuosas?
2. ¿y de que a lo sumo dos se encuentren defectuosas?
3. ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

Solución

Sea ξ_i una variable aleatoria que representa el estado de una unidad terminada en la línea de ensamblaje en el momento i, siendo $\xi_i = 1$ si la unidad es defectuosa y $\xi_i = 0$ en caso contrario. La variable ξ_i sigue una distribución de Bernoulli con parámetro $p = 0{,}05$, de acuerdo con el dato inicial del problema. Además, nótese que un conjunto de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes, por lo que el número de unidades defectuosas de un total de n unidades terminadas $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, esto es, $\eta_{n,p} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, sigue una distribución binomial de parámetros n y $p = 0{,}05$. Hechas estas consideraciones iniciales, procedemos a resolver el problema.

1. Procedemos a calcular:

$$P\left(\eta_{10,0,05} = 2\right) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot (1 - 0{,}05)^8 = 0{,}0746.$$

2. Se tiene que:

$$P\left(\eta_{10,0,05} \leq 2\right) = \sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} \cdot 0{,}05^i \cdot (1 - 0{,}05)^{10-i} = 0{,}9884.$$

3. Por último:

$$\begin{aligned} P\left(\eta_{10,0,05} \geq 1\right) &= 1 - P\left(\eta_{10,0,05} = 0\right) = \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1 - 0{,}05)^{10-0} = \\ &= 1 - 0{,}5987 = 0{,}4013. \end{aligned}$$

P4.2] El gerente de un restaurante que sólo da servicio mediante reservas sabe, por experiencia, que el 20 % de las personas que reservan una mesa no asistirán. Si el restaurante acepta 25 reservas pero sólo dispone de 20 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que a todas las personas que asistan al restaurante se les asigne una mesa?

Solución

Representemos por la variable aleatoria ξ la decisión de asistir $(\xi = 0)$ o no $(\xi = 1)$ finalmente al restaurante por parte de una persona que ha hecho una reserva. Esta variable sigue una distribución de Bernoulli de parámetro $p = 0{,}2$, de acuerdo con el enunciado del ejercicio. Suponiendo que las distintas reservas son independientes entre sí, se tiene que, de un total de n reservas $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, el número de ellas que acuden finalmente al restaurante es una variable aleatoria $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, con distribución binomial de parámetros n y $p = 0{,}2$. En el caso particular del problema, $n = 25$. Entonces, para que aquellas personas que asistan al restaurante de las 25 que han hecho la reserva puedan disponer de una mesa, debe ocurrir que acudan 20 o menos. Así, se tiene que:

$$P\left(Y_{25} \leq 20\right) = \sum_{i=0}^{20} \binom{25}{i} \cdot 0{,}2^i \cdot (1 - 0{,}2)^{25-i} = 0{,}5799.$$

P4.3] Una empresa electrónica observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de estos fallos es ocho,

1. ¿cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?
2. ¿y de que fallen no más de dos componentes en 50 horas?
3. ¿cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

Solución

Sea la variable aleatoria ξ, con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_\xi = E[\xi] = 8$, que determina el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento.

1. Considerando que se cumplen ciertas condiciones de regularidad, podemos asumir que una variable η que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir 25 horas de funcionamiento sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda_\eta = E[\eta] = 8/4 = 2$. Por lo tanto, la probabilidad deseada es la siguiente:

$$P(\eta = 1) = \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} = 0.\,27067.$$

2. Análogamente, definimos una variable aleatoria U con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_U = 8/2 = 4$, que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir las 50 horas de funcionamiento. Se tiene entonces que:

$$P(U \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{4^i}{i!} \cdot e^{-4} = 0.\,2381.$$

3. De la misma forma, definiendo una variable aleatoria V con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_V = 10$, se obtiene:

$$P(V \geq 10) = 1 - P(V < 10) = 1 - \sum_{i=0}^{10} \frac{10^i}{i!} \cdot e^{-10} = 0{,}41696.$$

P4.4] Una gran tienda de artículos eléctricos descubre que el número ξ de tostadores vendidos por semana obedece a una ley de Poisson de media 10. La ganancia de cada tostador vendido es de 500 ptas. Sin embargo, un lunes se encuentran con que sólo les quedan 10 tostadores, y que a lo largo de esa semana no van a poder traer más del almacén. Determinar la distribución de las ganancias totales (en ptas.) en concepto de tostadores de pan a lo largo de esa semana.

Solución

Teniendo en cuenta los datos del problema, podemos definir una variable aleatoria η, que representa la ganancia total (en pesetas) en concepto de tostadores de pan a lo largo de la semana considerada, a partir de la variable ξ:

$$\eta = \begin{cases} 500 \cdot \xi & , \text{si} \quad 0 \leq \xi < 10 \\ 5000 & , \text{si} \quad \xi \geq 10 \end{cases}$$

En el segundo caso, si la demanda ξ es de más de 10 tostadores, es decir, si supera al número de existencias, sólo es posible vender este último número de tostadores.

La distribución de las ganancias totales en pesetas es, por tanto:

$$F_\eta(t) = P(\{w \in \Omega : \eta(w) \leq t\}) =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{si } t < 0 \\ P(500 \cdot \xi \leq t) = F_\xi\left(\frac{t}{500}\right) = \sum_{i=0}^{\lfloor t/500 \rfloor} P(\xi = i) & , \text{si } 0 \leq t < 5000 \\ 1 & , \text{si } t \geq 5000. \end{cases}$$

Nótese que una vez más $\eta = g \circ \xi$ (véase la figura 3.6) para una simple función real g.

P4.5] Se extraen n cartas, una a una con reemplazamiento, de una baraja española (4 palos de 10 cartas cada uno). Si ξ representa la suma de los n números que aparecen en las cartas,

1. calcular $P(\xi = k)$ y $E[\xi]$;
2. hallar la función generatriz de probabilidades de ξ.

Solución

Definamos una variable aleatoria η que representa el valor de una carta extraída del total de la baraja, con valores equiprobables 1,2,...,10, siendo $P(\eta = k) = 1/10$, para todo $k \in A = \{1, \dots, 10\}$. Definamos también un conjunto B formado por los $(k_1, \dots, k_n) \in A^n$ en los que no se repite un mismo número más de 4 veces. Nótese además que el único dato a tener en cuenta en cada extracción es el número de la carta, no el palo, puesto que en el problema se utilizará una variable ξ que da la suma de los números de un total de n extracciones con reemplazamiento.

Supuesta la independencia de las extracciones, sea $\eta_1, \ldots, \eta_n$ un conjunto de n variables aleatorias independientes con la misma distribución que η, que miden el resultado en cada una de las n extracciones con reemplazamiento. Nótese que $\xi = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$.

1. Las probabilidades deseadas son, dado un número $n = 1, 2, \ldots$:

$$P(\xi = k) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i = k\right)$$

$$= \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_n)\in B \\ \sum_{i=1}^{n} k_i = k}} \left[\prod_{i=1}^{n} P(\eta_i = k_i)\right] = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_n)\in B \\ \sum_{i=1}^{n} k_i = k}} \left(\frac{1}{10}\right)^n .$$

   Además,

$$E[\xi] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[\eta_i] = n \cdot E[\eta] = \frac{n}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} i = \frac{11}{2} \cdot n.$$

2. La función generatriz de probabilidades es:

$$\phi_\xi(t) = E\left[t^{\sum_{i=1}^{n} \eta_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E[t^{\eta_i}] = (E[t^\eta])^n .$$

   Se obtiene que:

$$E[t^\eta] = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{n} t^i = \frac{1}{10} \cdot \frac{t - t^{n+1}}{1-t},$$

   y por lo tanto:

$$\phi_\xi(t) = \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{t - t^{n+1}}{1-t}\right)^n .$$

P4.6] Se lanza consecutivamente un dado hasta que aparece por primera vez un as. Suponiendo que en el primer lanzamiento no hemos obtenido un as, calcular la probabilidad de que sean necesarios más de tres lanzamientos.

Solución

Sea ξ una variable aleatoria que representa el número de lanzamientos consecutivos (e independientes) que hay que efectuar con un dado hasta que aparezca un as por primera vez. Esta variable es una geométrica de parámetro $p = 1/6$, siendo p la probabilidad de obtener un as en un lanzamiento del dado. En el enunciado del problema se añade la suposición de que el as no se obtiene en el primer lanzamiento y, por lo tanto, la probabilidad que se pide calcular es:

$$P(\xi > 3 \mid \xi > 1) = \frac{P(\xi > 3)}{P(\xi > 1)} = \frac{1 - \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{1}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{1}} = \frac{25}{36} = 0,6944.$$

P4.7] De un paquete de n tarjetas ordenadas de forma creciente y numeradas $1, 2, \ldots, n$ se selecciona aleatoriamente una tarjeta. Si está marcada con k, se selecciona una segunda tarjeta entre las k primeras. Sea ξ_1 el número de la tarjeta seleccionada en primer lugar y ξ_2 el de la tarjeta seleccionada en segundo lugar. Calcular:

1. $P(\xi_2 = j)$,
2. $E[\xi_2]$,
3. $P(\xi_1 = k|\xi_2 = j)$,
4. $E[\xi_1]$.

Solución

Nótese que la variable ξ_1, supuestas ciertas condiciones de regularidad, puede tomar los valores $1, 2, \ldots, n$, con $P(\xi_1 = k) = 1/n$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Sin embargo, para el cálculo de las probabilidades $P(\xi_2 = j)$ es necesario tener en cuenta el resultado de la primera selección.

1. Se tiene que:

$$\begin{aligned} P(\xi_2 = j) &= \sum_{i=1}^{n} P(\xi_2 = j \mid \xi_1 = i) \cdot P(\xi_1 = i) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} P(\xi_2 = j \mid \xi_1 = i). \end{aligned}$$

Obsérvese que si $j > i$, entonces $P(\xi_2 = j \mid \xi_1 = i) = 0$. Por lo tanto:

$$P(\xi_2 = j) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=j}^{n} P(\xi_2 = j \mid \xi_1 = i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}.$$

2. El valor esperado de la tarjeta seleccionada en segundo lugar es:

$$E[\xi_2] = \sum_{j=1}^{n} j \cdot P(\xi_2 = j) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left[j \cdot \left(\sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i} \right) \right].$$

3. Procediendo de forma similar al primer apartado, se calcula:

$$P(\xi_1 = k|\xi_2 = j) = \frac{P(\xi_2 = j|\xi_1 = k) \cdot P(\xi_1 = k)}{P(\xi_2 = j)}$$

$$= \begin{cases} \left(k \cdot \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i} \right)^{-1} & \text{, si } j \leq k \\ 0 & \text{, si } j > k \end{cases}$$

4. Por último, el valor esperado para la primera tarjeta seleccionada es:

$$E[\xi_1] = \sum_{i=1}^{n} i \cdot P(\xi_1 = i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}.$$

P4.8] Un vendedor de enciclopedias sabe que la probabilidad de obtener un cliente en cada visita es 0.3. ¿Cuál es el número medio de visitas diarias si cada día vende exactamente 10 enciclopedias? ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo largo de un mes, no tenga que hacer más de 50 visitas diarias?

Solución

Definamos una variable aleatoria ξ que representa el número de visitas en las que no obtiene clientes que debe realizar el vendedor hasta vender 10 enciclopedias. Esta variable sigue una distribución binomial negativa de parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}3$, de acuerdo con los datos del problema, y por tanto $E[\xi] = n(1-p)/p$. Se asume que las visitas realizadas son independientes entre sí. Entonces, el número medio de visitas diarias que debe hacer el vendedor es:

$$E[\xi + 10] = \frac{n(1-p)}{p} + 10 = 10 \cdot \frac{0{,}7}{0{,}3} + 10 = 33.333.$$

Por otra parte, para calcular la probabilidad de que no tenga que hacer más de 50 visitas diarias a lo largo de un mes (de 30 días), definamos un conjunto de variables aleatorias $\xi_1, \ldots, \xi_{30}$ independientes e idénticamente distribuidas según ξ, que representan el número de visitas sin clientes necesarias hasta vender 10 enciclopedias cada uno de los días del mes. Se tiene que:

$$\begin{aligned} P(\xi_1 \leq 40, \ldots, \xi_{30} \leq 40) &= \prod_{i=1}^{30} P(\xi_i \leq 40) = [P(\xi \leq 40)]^{30} = \\ &= \left[\sum_{i=0}^{40} \binom{10+i-1}{i} \cdot 0{,}3^{10} \cdot 0{,}7^{i} \right]^{30} = \\ &= 0.95977^{30} = 0.29175. \end{aligned}$$

P4.9] Hallar el mínimo entero n tal que la probabilidad de obtener al menos un as en n lanzamientos, sea mayor o igual que 0.9.

Solución

Sea ξ_n una variable aleatoria que representa el número de ases obtenidos en n lanzamientos de un dado. Se debe obtener el menor entero n tal que:

$$P\left(\xi_n \geq 1\right) \geq 0{,}9,$$

es decir,

$$P\left(\xi_n = 0\right) \leq 0{,}1.$$

Considerando que la probabilidad de obtener un as con este dado es $1/6$, se tiene que:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1,$$

desigualdad que se verifica para todo $n \geq 13$.

P4.10] Demostrar las siguientes fórmulas recurrentes para el cálculo de la función de probabilidad:

1. $P_\xi(k+1) = \dfrac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \cdot P_\xi(k), \quad$ si $\xi \sim \mathrm{Bi}(n;p)$.
2. $P_\xi(k+1) = \dfrac{\lambda}{k+1} \cdot P_\xi(k), \quad$ si $\xi \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$.
3. $P_\xi(k+1) = \dfrac{(n+k)(1-p)}{k+1} \cdot P_\xi(k), \quad$ si $\xi \sim \mathrm{BiNeg}(n;p)$.
4. $P_\xi(k+1) = \dfrac{(A-k)(n-k)}{(k+1)(B-(n-k)+1)} \cdot P_\xi(k), \quad$ si $\xi \sim \mathrm{Hip}(n, A, B)$.

Solución

1. Si $\xi \sim \mathrm{Bi}(n;p)$, entonces

$$P_\xi\left(k\right) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

para todo $k = 0, \ldots, n$. Se verifica que:

$$\begin{aligned} P_\xi(k+1) &= \binom{n}{k+1} \cdot p^{k+1} \cdot (1-p)^{n-k-1} = \\ &= \left[\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}\right] \cdot p \cdot p^k \cdot \frac{(1-p)^{n-k}}{(1-p)} = \\ &= \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \cdot P_\xi(k). \end{aligned}$$

2. Si $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda)$, entonces

$$P_{\xi}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

para todo $k = 0, 1, \ldots$ Se verifica que:

$$P_{\xi}(k+1) = \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{k+1} \cdot P_{\xi}(k).$$

3. Si $\xi \sim \text{BiNeg}(n; p)$, entonces

$$P_{\xi}(k) = \binom{n+k-1}{k} \cdot p^n \cdot (1-p)^k,$$

para todo $k = n, n+1, \ldots$ Se verifica que:

$$\begin{aligned} P_{\xi}(k+1) &= \binom{n+k}{k+1} \cdot p^n \cdot (1-p)^{k+1} = \\ &= \left[\binom{n+k-1}{k} \cdot \frac{n+k}{k+1}\right] \cdot p^n \cdot (1-p)^k \cdot (1-p) = \\ &= \frac{(n+k)(1-p)}{k+1} \cdot P_{\xi}(k). \end{aligned}$$

4. Si $\xi \sim \text{Hip}(n, A, B)$, entonces

$$P_{\xi}(k) = \frac{\binom{A}{k} \cdot \binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}},$$

para todo $k = 0, \ldots, n$. Se verifica que:

$$\begin{aligned} P_{\xi}(k+1) &= \frac{\binom{A}{k+1} \cdot \binom{B}{n-k-1}}{\binom{A+B}{n}} = \\ &= \frac{\left[\frac{A-k}{k+1} \cdot \binom{A}{k}\right] \cdot \left[\frac{n-k}{B-n+k+1} \cdot \binom{B}{n-k}\right]}{\binom{A+B}{n}} = \\ &= \frac{(A-k)(n-k)}{(k+1)(B-(n-k)+1)} \cdot P_{\xi}(k). \end{aligned}$$

P4.11] Sean ξ y η las variables aleatorias que cuentan el número de veces que sale 1 y 6, respectivamente, en 5 lanzamientos de un dado. ¿Son ξ y η independientes?

Solución

Las variables ξ y η siguen ambas una distribución binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 1/6$. Veamos, mediante un contraejemplo, que ξ y η no son independientes. Por un lado se tiene que:

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 ,$$

pero

$$P(\xi = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = P(\eta = 0),$$

y por lo tanto

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \neq P(\xi = 0) \cdot P(\eta = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} ,$$

concluyéndose así que las variables no son independientes.

P4.12] En la teoría de los rayos cósmicos se presenta la distribución de Pascal-Furry, dada por los valores $i = 0, 1, 2, \ldots$, con probabilidades respectivas: $p_i = \frac{1}{1+\mu}(\frac{\mu}{1+\mu})^i$, $\mu > 0$. Determinar el parámetro μ.

Solución

Se verifica que

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1+\mu} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^i = \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{1}{1 - [\mu/(\mu+1)]} = 1,$$

para cualquier $\mu > 0$. Además, $1/(1+\mu) < 1$ y $[\mu/(1+\mu)]^i < 1$, para todo $\mu > 0$.

P4.13] Pedro y Juan dividen al azar una barra de chocolate con $4n$ porciones ($n > 0$) en dos trozos de modo que el trozo de Pedro siempre es mayor que el de Juan, al que siempre le toca algo.

1. Calcular el número esperado de porciones de Pedro.
2. Calcular la varianza de tal número.
3. Probar que si en tres ocasiones sucesivas el trozo de Pedro es mayor que tres veces el de Juan, es razonable pensar que la partición no se ha hecho de un modo aleatorio.

Solución

1. Consideremos el espacio muestral Ω formado por todas las posibles divisiones de la tableta. Numerando las porciones podemos caracterizar cada división mediante un número entre 1 y $4n-1$, donde no vale el $2n$. Es decir, cada suceso elemental $w \in \Omega$ puede identificarse como la cantidad de porciones que quedan a un lado (por ejemplo a la derecha) tras la división, lo que a la vez determina el número de porciones que quedan al otro lado. Así:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 4n-2, 4n-1\} - \{2n\}.$$

Para cada $w \in \Omega$, no confundamos su valor con la cantidad de porciones que le damos a Juan y a Pedro, ya que esto se calcula mediante un mínimo y un máximo de $\{w, 4n-w\}$, respectivamente. Asumamos por hipótesis que Ω es equiprobable, es decir, que:

$$P(w) = \frac{1}{4n-2},$$

para todo $w \in \Omega$, o dicho en otras palabras, que la tableta se parte en dos trozos de forma aleatoria y uniforme, pero descartando la probabilidad de que los dos trozos sean iguales o alguno vacío.

Definamos ahora las variables aleatorias:

$$\begin{array}{rccl} \xi : & \Omega & \to & I\!R \\ & w & \mapsto & \xi(w) = \text{máx}\{w, 4n-w\} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccl} \eta : & \Omega & \to & I\!R \\ & w & \mapsto & \eta(w) = \text{mín}\{w, 4n-w\} \end{array}$$

representando la primera a Pedro y la segunda a Juan. Antes de sumergirnos en el cálculo de $E[\xi]$ y $V(\xi)$, como pide el enunciado, conozcamos algo de estas variables. Claramente son discretas y $\eta = 4n-\xi$. Además, ξ toma valores en $\{2n+1, 2n+2, \ldots, 4n-2, 4n-1\}$, todos con igual probabilidad:

$$P(\xi = k) = P(\{w \in \Omega : \xi(w) = k\}) = \frac{2}{4n-2} = \frac{1}{2n-1},$$

cualquiera que sea $k \in \{2n+1, \ldots, 4n-1\}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \sum_{k=2n+1}^{4n-1} k \cdot P(\xi = k) = 2n + \frac{1}{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} k = \\ &= 2n + \frac{n(2n-1)}{2n-1} = 3n. \end{aligned}$$

2. De la misma forma, se obtiene que:

$$V(\xi) = E\left[\xi^2\right] - (E[\xi])^2 = \sum_{k=2n+1}^{4n-1} k^2 \cdot P(\xi = k) - 9n^2 =$$

$$= \frac{1}{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} (k+2n)^2 - 9n^2 =$$

$$= \frac{1}{2n-1} \left[\sum_{k=1}^{2n-1} k^2 + 4n \sum_{k=1}^{2n-1} k + 4n^2 (2n-1) \right] - 9n^2 =$$

$$= \frac{1}{2n-1} \left[\frac{2(2n-1)^3 + 3(2n-1)^2 + (2n-1)}{6} + 8n^2(2n-1) \right]$$

$$-9n^2 = \frac{n(n-1)}{3}.$$

3. Si el trozo de Pedro es mayor que tres veces el de Juan en una partición, se verifica que:

$$\xi > 3 \cdot (4n - \xi),$$

es decir:

$$\xi > 3n.$$

Por lo tanto, supongamos que se realizan 3 particiones (independientes) y representemos, respectivamente, por ξ_1, ξ_2 y ξ_3 al número de trozos que corresponden a Pedro en cada una. Siendo las variables ξ_1, ξ_2 y ξ_3 independientes, se tiene que:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{3} P(\xi_i > 3n) &= [P(\xi > 3n)]^3 = \left[\sum_{i=3n+1}^{4n-1} P(\xi = i) \right]^3 = \\ &= \left[(4n - 1 - (3n+1) + 1) \cdot \frac{1}{2n-1} \right]^3 = \\ &= \left(\frac{n-1}{2n-1} \right)^3, \end{aligned}$$

que es una probabilidad muy pequeña. Por lo tanto, es razonable pensar que la partición no se ha hecho de un modo aleatorio.

P4.14] Una variable aleatoria ξ tiene la función generatriz $G_\xi(t) = (0{,}2e^t + 0{,}8)^5$. Se pide:

1. Función de probabilidad.
2. $P(\xi > 0)$ y $P(1 \leq \xi \leq 3)$.

3. Esperanza y varianza.

Solución

Podemos obtener la función generatriz de probabilidades de esta variable aleatoria discreta a partir de la función generatriz de momentos. Nótese que la función generatriz de probabilidades de una variable aleatoria es la función $\phi_\xi(t) = E\left[t^\xi\right]$, mientras que su función generatriz de momentos es $G_\xi(t) = E\left[e^{t\xi}\right]$. Por lo tanto:

$$\phi_\xi(t) = G_\xi(\ln t) = \left(0{,}2 \cdot e^{\ln t} + 0{,}8\right)^5 = (0{,}2 \cdot t + 0{,}8)^5 .$$

1. Se verifica que, si ϕ_ξ es derivable k veces en un entorno del origen, entonces:
$$\left.\frac{\partial \phi_\xi{}^{(k)}}{\partial t^k}(t)\right|_{t=0} = k! \cdot P(\xi = k).$$
En concreto, en este caso, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Así:
$$P(\xi = k) = \frac{5!}{(5-k)! \cdot k!} \cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{5-k},$$
para todo $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Nótese que ésta es la función de probabilidad de una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 0{,}2$.
2. Teniendo esto en cuenta, se tiene que:
$$P(\xi > 0) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0.67232.$$
3. De forma similar:
$$P(1 \leq \xi \leq 3) = \sum_{k=1}^{3} \binom{5}{k} \cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{5-k} = 0{,}6656.$$
4. Si $G(t)$ es derivable en un entorno del origen k veces, entonces
$$\left. G^{(k)}(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial G^{(k)}}{\partial t^k}(t)\right|_{t=0} = m_k.$$
En este caso:
$$E[\xi] = m_1 = \left. G_\xi^{'}(t)\right|_{t=0} = \left.\left[\left(0{,}2 \cdot e^t + 0{,}8\right)^4 \cdot e^t\right]\right|_{t=0} = 1.$$
Y también:
$$\begin{aligned} V(\xi) &= m_2 - m_1^2 = \left. G_\xi^{''}(t)\right|_{t=0} - 1 \\ &= \left.\left[e^t \cdot \left(0{,}2 \cdot e^t + 0{,}8\right)^3 \cdot \left(1{,}6 + 0{,}2 \cdot e^t\right)\right]\right|_{t=0} - 1 = 0{,}8 \end{aligned}$$

P4.15] Una variable aleatoria ξ tiene la siguiente función generatriz $G_\xi(t) = e^{2(e^t-1)}$. Se pide:

1. Función de probabilidad.
2. $P(\xi > 1)$ y $P(\xi > 2)$.
3. Esperanza y desviación típica.

Solución

Procediendo de forma análoga al ejercicio anterior, la función generatriz de probabilidades es:

$$\phi_\xi(t) = G_\xi(\ln t) = e^{2\cdot\left(e^{\ln t}-1\right)} = e^{2\cdot(t-1)}.$$

1. Asimismo:
$$P(\xi = k) = \frac{1}{k!} \cdot 2^k \cdot e^{-2},$$
para todo $k = 0, 1, \ldots$ Nótese que esto se corresponde con la función de probabilidad de una variable de Poisson con parámetro $\lambda = 2$.
2. Las probabilidades deseadas son:
$$P(\xi > 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} \cdot 2^k \cdot e^{-2} = 0{,}59399.$$
y también:
$$P(\xi > 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} \cdot 2^k \cdot e^{-2} = 0{,}32332.$$
3. Por último, y de forma similar al anterior ejercicio:
$$E[\xi] = m_1 = G'_\xi(t)\Big|_{t=0} = \left[2 \cdot e^{2\cdot\left(e^t-1\right)+t}\right]\Big|_{t=0} = 2,$$
y también:
$$V(\xi) = m_2 - m_1^2 = G''_\xi(t)\Big|_{t=0} - 1$$
$$= \left[2 \cdot \left(2 \cdot e^t + 1\right) \cdot e^{2\cdot\left(e^t-1\right)+t}\right]\Big|_{t=0} - 4 = 2.$$

P4.16] El tiempo de reparación de unas máquinas de escribir tiene una distribución aproximadamente exponencial, con media 22 minutos.

1. Hallar la probabilidad de que el tiempo de reparación sea menor que diez minutos.

2. El costo de reparación es de 2000 pts. por cada media hora o fracción. ¿Cuál es la probabilidad de que una reparación cueste 4000 pts.?
3. Para efectuar una programación, ¿cuánto tiempo se debe asignar a cada reparación para que la probabilidad de que cualquier tiempo de reparación mayor que el tiempo asignado sea sólo de 0.1?

Solución

Definamos una variable aleatoria ξ que representa el tiempo de reparación (en minutos) de las máquinas y sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = (E[\xi])^{-1} = 1/22$. Por lo tanto, la función de densidad de esta variable es:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{22} \cdot e^{-x/22}, x > 0.$$

1. La probabilidad de que un tiempo de reparación sea menor que diez minutos es:

$$P(\xi < 10) = \int_0^{10} \frac{1}{22} \cdot e^{-x/22} \partial x = -e^{-x/22}\Big|_0^{10} = 1 - e^{-5/11}.$$

2. De acuerdo con el enunciado, para un tiempo de reparación dado, el costo de reparación se obtendrá a partir del número total de fracciones de media hora y el conjunto de minutos restantes, inferiores a 30. (Todos, este último inclusive, se cobran a 2000 pesetas). Teniendo esto en cuenta, se observa que una reparación costará 4000 pesetas siempre que su duración sea superior a 30 minutos e inferior o igual a 60 minutos (y así cada fracción de la segunda media hora se cobrará como una media hora entera). Así:

$$P(30 < \xi \leq 60) = \int_{30}^{60} \frac{1}{22} \cdot e^{-x/22} \partial x = -e^{-30/11} + e^{-15/11}.$$

3. Representamos por t $(t > 0)$ el tiempo asignado a una reparación (en minutos). Debe verificarse:

$$P(\xi > t) = 0{,}1,$$

es decir:

$$\int_t^{\infty} \frac{1}{22} \cdot e^{-x/22} \partial x = -e^{-x/22}\Big|_t^{\infty} = e^{-t/22} = 0{,}1$$

y esto se cumple para $t = -22 \cdot \ln 0{,}1 = 50.657 \cong 51$ minutos.

P4.17] Se supone que las plantas de una determinada especie se distribuyen de forma aleatoria en una región con densidad promedio de λ plantas por unidad de área. Además se conoce que tal aleatoriedad sigue una distribución de Poisson, es decir, que el número de plantas en una región con área A es una variable aleatoria de Poisson de parámetro $\lambda \cdot A$. Elegida una planta al azar, sea ξ la distancia a la planta vecina de su misma especie más próxima. Determinar la función de densidad de ξ y determinar su valor medio.

Solución

Comencemos determinando la función de distribución de ξ, es decir, $F_\xi(x) = P(\{w : \xi(w) \leq x\})$ para todo $x \in I\!R$. Claramente $F_\xi(x) = 0$ cuando $x \leq 0$. En cambio, si $x > 0$ entonces $\{w : \xi(w) \leq x\}$ representa el suceso "en un círculo de radio x, descontado el punto central, hay al menos una planta". Éste es el suceso complementario de "en un círculo de radio x, descontado el punto central, no hay ninguna planta", y cuya probabilidad viene dada por

$$\frac{\left(\lambda \pi x^2\right)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda \cdot \pi \cdot x^2} = e^{-\lambda \cdot \pi \cdot x^2},$$

ya que el área de un círculo de radio x (incluso eliminándole el punto central) es $\pi \cdot x^2$. Consecuentemente,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot \pi \cdot x^2} & \text{, si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Ahora podemos fácilmente conocer la función de densidad de ξ :

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si} \quad x < 0 \\ 2\lambda \pi x e^{-\lambda \cdot \pi \cdot x^2} & \text{, si} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

y su media:

$$E[\xi] = \int_0^\infty 2\lambda \pi x^2 e^{-\lambda \cdot \pi \cdot x^2} \partial x = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}.$$

P4.18] Demostrar que si ξ tiene distribución exponencial con media λ, entonces la variable aleatoria $\eta = \lfloor \xi \rfloor$ (parte entera de ξ) es una geométrica de parámetro p. Encontrar p en términos de λ.

Solución

La variable ξ tiene función de densidad $f_\xi(x) = (1/\lambda) \cdot e^{-x/\lambda}$, cuando $x > 0$. Para cualquier $k = 0, 1, 2, \ldots$ se tiene que:

$$\begin{aligned} P(\eta = k) &= P(\lfloor \xi \rfloor = k) = P(k \leq \xi < k+1) = \int_k^{k+1} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-x/\lambda} \partial x = \\ &= -e^{-x/\lambda}\Big|_k^{k+1} = e^{-k/\lambda} - e^{-(k+1)/\lambda} = e^{-k/\lambda}\left(1 - e^{-1/\lambda}\right), \end{aligned}$$

es decir, $P(\eta = k) = p \cdot (1-p)^k$ con $p = \left(1 - e^{-1/\lambda}\right)$.

P4.19] Supóngase que ξ se distribuye como $N(\mu, \sigma)$, de manera que $P(\xi \leq 0) = 1/3$ y $P(\xi \leq 1) = 2/3$.

1. ¿Cuáles son los valores de μ y σ?
2. ¿Y si $P(\xi \leq 1) = 3/4$?

Solución

1. A partir de estas dos condiciones, tipificando la variable ξ y buscando los correspondientes percentiles en las tablas de la variable normal estándar, podremos obtener dos ecuaciones lineales en μ y σ. Debe verificarse que:

$$P(\xi \leq 0) = F_Z\left(\frac{0-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{3},$$

de donde se deduce que $-\mu/\sigma = z_{0,3333} = -0{,}4307$, siendo Z una variable aleatoria con distribución normal de media 0 y varianza 1. Además:

$$P(\xi \leq 1) = F_Z\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right) = \frac{2}{3},$$

luego $(1-\mu)/\sigma = z_{0,6667} = 0{,}4307$.obteniéndose finalmente que $\mu = 0{,}5$ y $\sigma = 1{,}16$.

2. En este caso, las ecuaciones serían $-\mu/\sigma = z_{0,3333} = -0{,}4307$ y, procediendo de modo análogo,

$$P(\xi \leq 1) = F_Z\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right) = \frac{3}{4},$$

es decir, $(1-\mu)/\sigma = z_{0,75} = 0{,}6745$, de lo que se obtiene que $\mu = 0{,}39$ y $\sigma = 0{,}9$.

P4.20] Encontrar la distribución de ξ^2 siendo ξ una variable aleatoria uniforme:

1. en el intervalo $[0,1]$;
2. en $[-1,1]$;
3. en $[-1,2]$.

Solución

Si ξ es una variable uniforme en un intervalo $[a,b]$, $a<b$, se tiene que su función de distribución es $F_\xi(u) = (u-a)/(b-a)$, para todo $u \in [a,b]$.

Por lo tanto, si se quiere ver la distribución del cuadrado de esta variable, que denominaremos η, se procederá del siguiente modo:

$$\begin{aligned} F_\eta(t) &= P(\eta \leq c) = P\left(\xi^2 \leq c\right) \\ &= P\left(-\sqrt{c} \leq \xi \leq \sqrt{c}\right) = F_\xi\left(\sqrt{c}\right) - F_\xi\left(-\sqrt{c}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{c}-a}{b-a} - \frac{-\sqrt{c}-a}{b-a} = \frac{2\cdot\sqrt{c}}{b-a}, \end{aligned}$$

obteniéndose, en cada caso particular:

1. Si $[a,b]=[0,1]$, $F_\eta(c) = 2\cdot\sqrt{c}$.
2. Si $[a,b]=[-1,1]$, $F_\eta(c) = \sqrt{c}$.
3. Si $[a,b]=[-1,2]$, $F_\eta(c) = 2\sqrt{c}/3$.

P4.21] Encontrar la distribución de $c\xi$, donde c es una constante positiva y ξ una exponencial de media θ.

Solución

Si la variable ξ sigue una distribución exponencial de media θ, su función de densidad vendrá dada por

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\theta}\cdot e^{-x/\theta}, x > 0,$$

y su función de distribución será, por tanto

$$F_\xi(t) = \int_0^t \frac{1}{\theta}\cdot e^{-x/\theta}\partial x = -e^{-x/\theta}\Big|_0^t = 1 - e^{-t/\theta}.$$

La distribución de la variable cX es:

$$F_{c\xi}(t) = P(c\xi \leq t) = F_\xi(t/c) = 1 - e^{-t/(c\cdot\theta)},$$

que se corresponde con la distribución de una variable aleatoria exponencial de media $c\cdot\theta$.

P4.22] Supongamos que una partícula es lanzada desde el origen del plano xy en línea recta que forma un ángulo θ con el eje x. Sea ξ la segunda coordenada del punto cuando la partícula choca con la recta $x=1$. Mostrar que si el ángulo se distribuye uniformemente en $(-\pi/2,\pi/2)$, entonces $f_\xi(y) = [\pi(1+y^2)]^{-1}$. Esta distribución se llama *distribución de Cauchy*. Ver que es simétrica respecto al cero pero que no tiene esperanza.

Solución

Nótese que si la línea recta forma un ángulo θ con el eje x, la segunda coordenada del punto donde la partícula choca con la recta $x=1$ coincide con la tangente de θ, es decir, la variable $\xi = \mathsf{tan}\theta$. Teniendo en cuenta que, además, θ sigue una distribución uniforme en $(-\pi/2, \pi/2)$, $f_\theta(t) = 1/\pi$, para todo $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Se obtiene que:

$$f_\xi(y) = f_\theta(\mathsf{arctan}(y)) \cdot (\mathsf{arctan}(y)) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(1 + y^2\right)^{-1}.$$

Además, aunque es simétrica respecto al cero no tiene esperanza, puesto que

$$\int_{-\infty}^{0} 1/\pi \cdot y \cdot \left(1 + y^2\right)^{-1} \cdot \partial y = -\infty$$

pero

$$\int_{0}^{+\infty} 1/\pi \cdot y \cdot \left(1 + y^2\right)^{-1} \cdot \partial y = +\infty.$$

P4.23] A partir de las expresiones de las distribuciones notables, di cuál es el valor adecuado de la constante c de manera que $c \cdot h(x)$ sea función de densidad, e indica su esperanza y varianza para las siguientes funciones $h(x)$, donde a y b son parámetros positivos:

(a) $\exp(-x^2/2)$, para todo $x \in I\!R$;	(f) $e^{-(x-a)^2/b^2}$, para todo $x \in I\!R$;
(b) x, $0 < x \leq 2$;	(g) $e^{-ax}x^5$, $x > 0$;
(c) 1, $1 < x < 10$;	(h) $e^{-a\|x\|}$, para todo $x \in I\!R$;
(d) $\exp(-5x)$, $x > 0$;	(i) $x^7(1-x)^9$, $0 < x < 1$;
(e) $e^{-(x-a)^2}$, para todo $x \in I\!R$;	(j) $x^7(b-x)^9$, $0 < x < b$.

Solución

La constante c debe verificar que:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0, \text{ para todo } x \in A, \\ \int_A f(x)\,\partial x &= 1. \end{aligned}$$

1. Se verifica que $\int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot \exp(-x^2/2) \cdot \partial x = c \cdot \sqrt{2\pi} = 1$ si $c = 1/\sqrt{2\pi}$. Además, esta función es positiva para cualquier valor real, por lo que es una función de densidad. Una vez determinado el valor de c, calculamos la esperanza y la varianza de la variable, resultando:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot 1/\sqrt{2\pi} \cdot \exp(\frac{-x^2}{2}) \cdot \partial x = 0.$$

$$V(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(\frac{-x^2}{2}) \cdot \partial x = 1.$$

2. Se tiene que $\int_0^2 cx \cdot \partial x = 2c = 1$ si $c = 1/2$. Además:

$$E[X] = \int_0^2 \frac{x^2}{2} \cdot \partial x = \frac{4}{3}.$$

$$V(X) = \int_0^2 \frac{x^3}{2} \cdot \partial x - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

3. Para que sea función de densidad, se ha de cumplir que $\int_1^{10} c\cdot\partial x = 1$, para lo cual c debe ser igual a $1/9$. La esperanza y la varianza de la variable son:

$$E[X] = \int_1^{10} \frac{x}{9} \cdot \partial x = \frac{11}{2}.$$

$$V(X) = \int_1^{10} \frac{x^2}{9} \cdot \partial x - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 37 - \frac{121}{4} = \frac{27}{4}.$$

4. Se verifica que $\int_0^\infty c \cdot \exp(-5x) \cdot \partial x = c/5 = 1$ si $c = 5$. Por lo tanto:

$$E[X] = \int_0^\infty 5x \cdot e^{-5x} \cdot \partial x = \frac{1}{5}.$$

$$V(X) = \int_0^\infty 5x^2 \cdot e^{-5x} \cdot \partial x - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

5. La función $c\cdot e^{-(x-a)^2}$ es función de densidad si $\int_{-\infty}^{+\infty} c\cdot e^{-(x-a)^2}\cdot\partial x = 1$, condición que se cumple para $c = 1/\sqrt{\pi}$. Se tiene entonces que:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{e^{-(x-a)^2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \partial x = a.$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-(x-a)^2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \partial x - a^2 = \frac{1}{2}.$$

6. Se verifica que $\int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot e^{-(x-a)^2/b^2} \cdot \partial x = cb\sqrt{\pi} = 1$ si $c = (b\sqrt{\pi})^{-1}$. Nótese que $c > 0$. Además:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \cdot x \cdot e^{-(x-a)^2/b^2} \cdot \partial x = a.$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \cdot x^2 \cdot e^{-(x-a)^2/b^2} \cdot \partial x - a^2 = b^2/2.$$

7. La integral $\int_0^{\infty} c \cdot e^{-ax} \cdot x^5 \cdot \partial x = 1$ si $c = a^6/120$. Además:

$$E[X] = \int_0^{\infty} \frac{a^6}{120} \cdot e^{-ax} \cdot x^6 \cdot \partial x = \frac{6}{a}.$$

$$V(X) = \frac{42}{a^2} - \frac{36}{a^2} = \frac{6}{a^2}.$$

8. Para que sea función de densidad, se ha de cumplir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot e^{-a|x|} \cdot \partial x = \frac{2c}{a} = 1,$$

para lo cual c debe ser igual a $a/2$. La esperanza y la varianza de la variable son:

$$E[X] = 0$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{2} \cdot x^2 \cdot e^{-a|x|} \cdot \partial x - 0^2 = \frac{2}{a^2}.$$

9. Se verifica que $\int_0^1 c \cdot x^7 \cdot (1-x)^9 \cdot \partial x = c/194480 = 1$ si $c = 194480$. Una vez determinado el valor de c, calculamos la esperanza y la varianza de la variable, resultando:

$$E[X] = \int_0^1 194480 \cdot x^8 \cdot (1-x)^9 \cdot \partial x = \frac{4}{9}.$$

$$V(X) = \int_0^1 194480 \cdot x^9 \cdot (1-x)^9 \cdot \partial x - \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{4}{19} - \frac{16}{81} = \frac{20}{1539}.$$

10. Para que sea función de densidad, se ha de cumplir que

$$\int_0^b c \cdot x^7 \cdot (b-x)^9 \cdot \partial x = 1,$$

para lo cual c debe ser igual a $194480/b^{17}$. La esperanza y la varianza de la variable son:

$$E[X] = \int_0^b \frac{194480}{b^{17}} \cdot x^8 \cdot (b-x)^9 \cdot \partial x = \frac{4}{9} \cdot b.$$

$$V(X) = \int_0^b \frac{194480}{b^{17}} \cdot x^9 \cdot (b-x)^9 \cdot \partial x - \frac{16}{81} \cdot b^2 = \frac{4}{19} b^2 - \frac{16}{81} \cdot b^2 = \frac{20}{1539} b^2.$$

P4.24] Consideremos un dado que tiene en tres de sus caras un 1, en dos tiene un 2 y en una de ellas un 3. Tres jugadores actúan de la siguiente manera: el primero obtiene sus puntos lanzando el dado; el segundo lo vuelve a lanzar y sus puntos son el producto los puntos en su lanzamiento por los puntos del primero; igualmente hace el tercero multiplicando el resultado de su lanzamiento por los puntos del segundo.

1. Describir el espacio probabilístico asociado a esta experiencia aleatoria: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
2. Sea ξ el número de jugadores con igual puntuación y η la suma de las tres puntuaciones. Calcular $P(\xi < 3)$ y $P(\eta > 8|\xi \leq 1)$.
3. Hallar $E[\eta|\xi = 2]$.

Solución

1. Sea Ω el espacio formado por las posibles puntuaciones de los tres jugadores. Teniendo en cuenta cómo se obtienen, según las reglas del juego:

$$\Omega = \left\{ w = (x, y, z) : x, \frac{y}{x}, \frac{z}{y} \in \{1, 2, 3\} \right\},$$

donde x, y, z son las puntuaciones obtenidas por cada uno de los tres jugadores, respectivamente. Sea también $\mathcal{A}$ la σ- álgebra formada por todos los subconjuntos de Ω y la función de probabilidad P, que se define teniendo en cuenta que los tres lanzamientos son independientes, siendo $1/2$ la probabilidad de obtener un 1, $1/3$ para un 2 y $1/6$ para un 3. Así, por ejemplo, si las puntuaciones son $1, 3$ y 6, los resultados de los tres lanzamientos deben de haber sido $1, 3$ y 2 para cada jugador, respectivamente, por lo que $P((1, 3, 6)) = (1/2) \cdot (1/6) \cdot (1/3) = 1/36$.

2. Las variables ξ y η están definidas sobre el espacio probabilístico definido en el apartado anterior del problema.

$$\begin{aligned} P(\xi &< 3) = 1 - P(\xi = 3) = 1 - P(\{w \in \Omega : x = y = z\}) = \\ &= 1 - [P((1,1,1)) + P((2,2,2)) + P((3,3,3))] = \\ &= 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$P(\eta > 8|\xi \leq 1) = \frac{P(\eta > 8, \xi \leq 1)}{P(\xi \leq 1)} = \frac{P(\eta > 8, \xi = 1)}{P(\xi = 1)}.$$

Para que las puntuaciones de los tres jugadores sean distintas, ningún resultado del dado puede ser igual a 1 para el segundo o tercer jugador. La tabla siguiente muestra las distintas posibilidades:

resultados dado	puntuación	probabilidad	suma de puntuaciones
1,2,2	$(1,2,4)$	$1/2 \cdot (1/3)^2$	7
1,2,3	$(1,2,6)$	$1/2 \cdot 1/3 \cdot 1/6$	9
1,3,2	$(1,3,6)$	$1/2 \cdot 1/3 \cdot 1/6$	10
1,3,3	$(1,3,9)$	$1/2 \cdot (1/6)^2$	13
2,2,2	$(2,4,8)$	$(1/3)^3$	14
2,2,3	$(2,4,12)$	$(1/3)^2 \cdot 1/6$	18
2,3,2	$(2,6,12)$	$(1/3)^2 \cdot 1/6$	20
2,3,3	$(2,6,18)$	$1/3 \cdot (1/6)^2$	26
3,2,2	$(3,6,12)$	$(1/3)^2 \cdot 1/6$	21
3,2,3	$(3,6,18)$	$1/3 \cdot (1/6)^2$	27
3,3,2	$(3,9,18)$	$1/3 \cdot (1/6)^2$	30
3,3,3	$(3,9,27)$	$(1/6)^3$	39

Se obtiene por tanto que:

$$\begin{aligned} P(\eta > 8, \xi = 1) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\quad + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ &= \frac{7}{36}, \end{aligned}$$

y además:

$$P(\xi = 1) = \frac{7}{36} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

por lo que:

$$P(\eta > 8 | \xi \leq 1) = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{9}.$$

P4.25] Para averiguar el tamaño N de una población de lagartos se utiliza el método siguiente de captura-marcaje-recaptura. Se capturan k lagartos, se les marca y se les reincorpora a su población. Un tiempo después se realizan n avistamientos independientes de los que ξ es el número de ellos que están marcados.

1. Obtener una expresión para la probabilidad de que $\xi = m$.
2. Si $k = 4$ y $m = 1$, demostrar que la probabilidad es máxima cuando $N = 4n$.
3. Si $N = 12$, $k = 4$ y $n = 3$, ¿cuál es la probabilidad de que los tres lagartos observados estén marcados si sabemos que al menos uno de ellos lo está?

4. ¿Cuál es el número medio de observaciones que habría que hacer para que en dos de ellas el lagarto esté marcado?

Solución

Teniendo en cuenta que los n avistamientos que se realizan son independientes, la variable aleatoria ξ sigue una distribución binomial de parámetros n y k/N, donde k/N es la probabilidad de que un lagarto escogido al azar de la población esté marcado.

1. La probabilidad de que m de los lagartos estén marcados es:

$$P(\xi = m) = \binom{n}{m} \cdot \left(\frac{k}{N}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-m}, m = 0, 1, \ldots, n.$$

2. Si $k = 4$ y $m = 1$:

$$P(\xi = 1) = \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{4}{N}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{4}{N}\right)^{n-1} = \frac{4 \cdot n \cdot (N-4)^{n-1}}{N^n}.$$

Derivando en la anterior expresión respecto de N e igualando a cero se obtiene que:

$$N^{n-1} \cdot (N-4)^{n-2} \cdot [(n-1) \cdot N - (N-4) \cdot n] = 0,$$

por lo que $N = 4n$.

3. Si $N = 12$, $k = 4$ y $n = 3$, la probabilidad de que los tres lagartos estén marcados sabiendo que al menos uno de ellos lo está es:

$$P(\xi = 3 \mid \xi \geq 1) = \frac{P(\xi = 3, \xi \geq 1)}{P(\xi \geq 1)} = \frac{P(\xi = 3)}{1 - P(\xi = 0)} = \frac{1}{397}.$$

P4.26] Una alumna trae cada día a la Universidad una tableta de chocolate de 16 cm., y de cuando en cuando le da un mordisco y se come la mitad de lo que le queda. Asumiendo que esta golosa apetencia aparece en la mañana siguiendo una distribución de Poisson de media un mordisco por hora:

1. Calcular la distribución del tiempo que transcurre hasta que aparece la primera mordida.
2. ¿Cuántos centímetros de chocolate esperas que le quede tras las cinco horas de clases?
3. ¿Qué probabilidad hay de que soporte una hora de clase sin morder su tableta?

4. Si un día, entre las 9:00 y las 14:00 horas, la ha mordido en cuatro ocasiones, ¿qué probabilidad hay de que lo haya hecho durante las tres primeras horas de clase?
5. Calcular la distribución del tiempo transcurrido hasta que toma el tercer trozo de chocolate. ¿Cuáles son los supuestos necesarios para que esa respuesta sea correcta?
6. Calcular la función de distribución del mínimo tiempo hasta su primera mordida en la mañana, a lo largo de los cinco días de una semana.

Solución

1. Fijado cualquier intervalo temporal de amplitud t horas, para $t > 0$ arbitrario pero fijo, sea ξ_t la variable aleatoria que mide el número de mordiscos que se producen en dicho intervalo. Según el enunciado, esta variable aleatoria sigue una distribución de Poisson de parámetro t, es decir:

$$P(\xi_t = k) = \frac{t^k}{k!} \cdot e^{-t}, \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Consideremos otra variable aleatoria η_1 que mide el tiempo que transcurre hasta que se produce el primer mordisco en un intervalo de amplitud ilimitada. Se pretende demostrar que:

$$f_{\eta_1}(x) = e^{-x}, \text{ para todo } x > 0.$$

En efecto, utilizando la información disponible para ξ_t y la relación entre ambas variables aleatorias, se tiene que, para cualquier $x > 0$:

$$\begin{aligned} F_{\eta_1}(x) &= P(\eta_1 \leq x) = 1 - P(\eta_1 > x) = 1 - P(\xi_x = 0) = \\ &= 1 - e^{-x} \cdot \frac{x^0}{0!} = 1 - e^{-x}, \end{aligned}$$

luego el tiempo que transcurre hasta que aparece la primera mordida sigue una distribución exponencial de parámetro 1.

2. Sea ζ_5 la variable aleatoria que mide la longitud de la tableta restante tras un intervalo de tiempo de 5 horas. Claramente:

$$\zeta_5 = \frac{16}{2^{\zeta_5}},$$

y por lo tanto lo solicitado es:

$$E[\zeta_5] = E\left[\frac{16}{2^{\zeta_5}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{2^k} \cdot P(\zeta_5 = k)$$

$$= 16 \cdot e^{-5} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^k = 16e^{-5/2}.$$

3. La probabilidad de que soporte una hora de clase sin morder su tableta es:
$$P(\xi_1 = 0) = \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

4. La probabilidad de que haya mordido la tableta cuatro veces en 5 horas, sabiendo que lo ha hecho en las tres primeras horas de clase es:
$$\begin{aligned} P(\xi_3 = 4 \mid \xi_5 = 4) &= \frac{P(\xi_3 = 4, \xi_5 = 4)}{P(\xi_5 = 4)} = \frac{P(\xi_3 = 4, \xi_2 = 0)}{P(\xi_5 = 4)} = \\ &= \frac{P(\xi_3 = 4) \cdot P(\xi_2 = 0)}{P(\xi_5 = 4)} = \\ &= \frac{\left(\frac{3^4}{4!} \cdot e^{-3}\right) \cdot \left(\frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2}\right)}{\left(\frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5}\right)} = 0.1296. \end{aligned}$$

5. Sea η_3 la variable aleatoria que mide el tiempo transcurrido hasta el tercer mordisco. Se tiene que:
$$\begin{aligned} F_{\eta_3}(t) &= P(\eta_3 \leq t) = 1 - P(\eta_3 > t) = \\ &= 1 - [P(\xi_t = 0) + P(\xi_t = 1) + P(\xi_t = 2)] = \\ &= 1 - \left(\frac{t^0}{0!} \cdot e^{-t} + \frac{t^1}{1!} \cdot e^{-t} + \frac{t^2}{2!} \cdot e^{-t}\right) = \\ &= 1 - e^{-t}\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right), \end{aligned}$$
y por lo tanto:
$$f_{\eta_3}(t) = \frac{\partial F_{\eta_3}(t)}{\partial t} = \frac{t^2 e^{-t}}{2}.$$
Otra alternativa consiste en razonar pensando que η_3 es suma de 3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas del tipo η_1, que denotaremos $\eta_1^1, \eta_1^2, \eta_1^3$, y por tanto:
$$f_{\eta_1^1, \eta_1^2, \eta_1^3}(x, y, z) = f_{\eta_1^1}(x) \cdot f_{\eta_1^2}(y) \cdot f_{\eta_1^3}(z) = e^{-(x+y+z)}.$$
Se obtiene entonces:
$$F_{\eta_3}(t) = P\left(\eta_1^1 + \eta_1^2 + \eta_1^3 \leq t\right)$$
$$= \int_0^t \int_0^{t-x} \int_0^{t-x} e^{-(x+y+z)} \cdot \partial z \cdot \partial y \cdot \partial x = \frac{t^2 e^{-t}}{2}.$$

6. Consideremos 5 variables aleatorias $\eta_1^1, \eta_1^2, \eta_1^3, \eta_1^4, \eta_1^5$ independientes e idénticamente distribuidas según la variable η_1 introducida en el primer apartado de este mismo problema, con distribución exponencial de parámetro 1. Se desea calcular la distribución de:

$$\eta = \text{mín}\left\{\eta_1^1, \eta_1^2, \eta_1^3, \eta_1^4, \eta_1^5\right\}.$$

La distribución de esta variable es:

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= P\left(\text{mín}\left\{\eta_1^1, \eta_1^2, \eta_1^3, \eta_1^4, \eta_1^5\right\} \le x\right) \\ &= 1 - P\left(\text{mín}\left\{\eta_1^1, \eta_1^2, \eta_1^3, \eta_1^4, \eta_1^5\right\} > x\right) = \\ &= 1 - \left[P(\eta_1 > x)\right]^5 = 1 - \left[1 - F_{\eta_1}(x)\right]^5 = 1 - e^{-5x}. \end{aligned}$$

P4.27] A y B disputan un torneo de ajedrez, que concluye cuando uno de ellos alcanza v victorias. En cada partida el jugador A tiene probabilidad p de ganar, y B probabilidad q, con $p+q < 1$. Dejando indicados los resultados, se pide:

1. probabilidad de que A gane el torneo, resultando t partidas en tablas y ganando b partidas el otro jugador. Probabilidad de que A gane el torneo;
2. función de probabilidad del número total de partidas disputadas;
3. en un momento dado, cuando el torneo no ha finalizado, nos enteramos de que B lleva ganadas b partidas y se han producido t tablas, pero no sabemos cuántas haya podido ganar A hasta el momento; calcular la probabilidad de que gane A.

Solución

Consideremos el espacio muestral:

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, \ldots) : w_i \in \{A, B, X\}\},$$

donde cada w_i representa el resultado de la partida $i-$ésima: $w_i = A$ significa que "A gana", $w_i = B$ significa que "A pierde" y $w_i = X$ significa que "A empata". Se asume que las partidas son independientes, sucediendo que:

$$\begin{aligned} P(A) &= p, \\ P(B) &= q, \\ P(X) &= 1 - p - q. \end{aligned}$$

1. Asumamos que $0 \le w < v$. Para calcular la probabilidad de que el torneo consista en:

- v partidas tipo A,
- w partidas tipo B,
- t partidas tipo X,
- la última partida es tipo A, es decir $w_{v+w+t} = A$,

observemos que hay $\binom{v+w+t-1}{w}$ formas de situar las w partidas tipo B entre las $v+w+t-1$ primeras partidas, y hay $\binom{v+t-1}{t}$ formas de situar las t partidas tipo tabla. Dado además que cualquiera de estas distribuciones posibles tiene probabilidad $p^v \cdot q^w \cdot (1-p-q)^t$, entonces la probabilidad del suceso solicitada es:

$$\begin{aligned} &P\left(S^A_{vA+wB+tX}\right) \\ &= \tbinom{v+w+t-1}{w} \cdot \tbinom{v+t-1}{t} \cdot p^v \cdot q^w \cdot (1-p-q)^t \\ &= \tfrac{(v+w+t-1)!}{w! \cdot t! \cdot (v-1)!} \cdot p^v \cdot q^w \cdot (1-p-q)^t . \end{aligned}$$

Finalmente la probabilidad de que gane A es:

$$P\left(S^A\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{v-1} P\left(S^A_{vA+wB+tX}\right)$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{v-1} \frac{(v+w+t-1)!}{w! \cdot t! \cdot (v-1)!} \cdot p^v \cdot q^w \cdot (1-p-q)^t .$$

2. Sea la variable aleatoria $\eta : \Omega \to I\!R$ donde $\eta(w)$ es el número de la partida donde aparece la $v-$ésima partida tipo A, si antes hay menos de v de tipo B; y el número de la partida donde aparece la $v-$ésima partida tipo B, en otro caso. Entonces, para todo $k \in \{v, v+1, \ldots\}$ sucede:

$$F_\eta(k) = \sum_{w=1}^{\text{mín}\{v-1,k-v\}} P\left(S^A_{vA+wB+(k-v-w)X}\right) + P\left(S^B_{wA+vB+(k-v-w)X}\right),$$

donde $S^A_{vA+wB+(k-v-w)X}$ es el conjunto de todos los posibles torneos en los que gana A, después de perder w partidas y empatar $k-v-w$, y donde $S^B_{wA+vB+(k-v-w)X}$ es el conjunto de todos los torneos en los que gana B después de perder w partidas y empatar $k-v-w$.

3. Asumimos que $w < v$. Entonces:

$$P(A \text{ gana}) = \sum_{k=0}^{v-1} P(A \text{ gana} \mid \text{ ha ganado } k) \cdot P(\text{ha ganado } k),$$

donde $P\left(A \text{ gana} \mid \text{ ha ganado } k\right)$ equivale a la probabilidad de que A obtenga las otras $v-k$ victorias, no más de $v-w-1$ derrotas, y cualquier número adicional de tablas. Así:

$$P\left(A \text{ gana} \mid \text{ ha ganado } k\right)$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{v-w-1}\frac{(v-k+s+u-1)!}{s!\cdot u!\cdot(v-k-1)!}\cdot p^{v-k}\cdot q^{u}\cdot(1-p-q)^{s}.$$

Por otro lado:

$$P\left(\text{ha ganado } k\right)=\binom{w+t+k}{w}\cdot\binom{t+u}{t}\cdot p^{k}\cdot q^{w}\cdot(1-p-q)^{t}.$$

Como conclusión:

$$P\left(A \text{ gana}\right)=\sum_{k=0}^{v-1}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{v-w-1}$$

$$\frac{(v-k+s+u-1)!\cdot(w+t+k)!}{s!\cdot u!\cdot(v-k-1)!\cdot w!\cdot t!\cdot k!}\cdot p^{v}\cdot q^{u+w}\cdot(1-p-q)^{s+t}.$$

P4.28] Sean x_1 y x_2 dos puntos aleatorios elegidos uniformemente en el intervalo $[0,\pi]$.

1. Hallar la función de densidad de la variable aleatoria $Y=X_1-X_2$.
2. Calcular la esperanza de Y y de $|Y|$.
3. Dados dos puntos elegidos uniformemente en una semicircunferencia de radio R, hallar la distribución de la distancia entre ellos.

Solución

1. El rango de la variable aleatoria $Y=X_1-X_2$ es el conjunto de valores comprendidos en el intervalo $[-\pi,\pi]$. Se deben distinguir dos casos posibles:

$$F_Y\left(y\right)=P\left(Y\leq y\right)=P\left(X_1-X_2\leq y\right)$$

$$=\begin{cases}(\pi+y)^2/\left(2\pi^2\right) & ,\text{ si }-\pi\leq y<0\\ \left[\pi^2-(\pi-y)^2/2\right]/\pi^2 & ,\text{ si } 0\leq y<\pi\end{cases},$$

de lo que se obtiene que:

$$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}(\pi+y)/\pi^2 & ,\text{ si }-\pi\leq y<0\\ (\pi-y)/\pi^2 & ,\text{ si } 0\leq y<\pi\end{cases},$$

es decir,

$$f_Y\left(y\right)=\frac{\pi-|y|}{\pi^2},\ y\in\left[-\pi,\pi\right].$$

2. La esperanza de la variable Y es:

$$E[Y] = \int_{-\pi} \pi y \cdot \frac{\pi - |y|}{\pi^2} \cdot \partial y$$

$$= \int_{-\pi}^{0} y \cdot \frac{\pi + y}{\pi^2} \cdot \partial y + \int_{0} \pi y \cdot \frac{\pi - y}{\pi^2} \cdot \partial y =$$

$$= \int_{0} \pi y \cdot \frac{\pi - y}{\pi^2} \cdot \partial y - \int_{0} \pi y \cdot \frac{\pi - y}{\pi^2} \cdot \partial y = 0.$$

Por otra parte, para la variable $|Y|$, se obtiene:

$$E[|Y|] = 2 \cdot \int_{0} \pi y \cdot \frac{\pi - y}{\pi^2} \cdot \partial y = \frac{\pi}{3}.$$

CAPÍTULO 5

Variables aleatorias bidimensionales

Si bien las variables aleatorias son funciones de un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sobre $I\!R$, los *vectores aleatorios* son funciones de un espacio probabilístico sobre $I\!R^n$, para algún natural n. En este capítulo se presentan problemas donde aparecen vectores aleatorios con $n = 2$.

Dado un vector aleatorio bidimensional $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, se llama *función de distribución conjunta* a la función definida sobre $I\!R^2$ como:

$$F_\xi(x_1, x_2) = P(\{w \in \Omega : \xi_1(w) \leq x_1, \xi_2(w) \leq x_2\})$$

para todo $(x_1, x_2) \in I\!R^2$. Se llama *función de distribución marginal* de una componente del vector aleatorio, a la proyección de la función de distribución conjunta cuando las otras componentes toman valores próximos a infinito. Por ejemplo,

$$F_{\xi_1}(x_1) = \lim_{x_2 \to +\infty} F_\xi(x_1, x_2).$$

Si la función de distribución conjunta del vector aleatorio es continua entonces cada componente del vector es una variable aleatoria continua, sucediendo que la función de densidad de una componente coincide con la integral de la función de densidad conjunta sobre la otra componente. Por ejemplo:

$$f_{\xi_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x_1, x_2) \partial x_2.$$

Cuando además las componentes son variables aleatorias independientes entonces:

$$f_\xi(x_1, x_2) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot \dot{f}_{\xi_2}(x_2).$$

Si el vector aleatorio asume sólo una cantidad numerable de valores, entonces cada componente es una variable aleatoria discreta, sucediendo que la función de probabilidad de una componente coincide con la suma de la función de probabilidad conjunta sobre la otra componente. Por ejemplo:

$$P_{\xi_1}(k_1) = \sum_{k_2} P_{\xi}(k_1, k_2).$$

Cuando además las componentes son variables aleatorias independientes entonces:

$$P_{\xi}(k_1, k_2) = P_{\xi_1}(k_1) \cdot \dot{P}_{\xi_2}(k_2).$$

Ejercicios Resueltos

P5.1] Sea la función de masa $P\{(1,2)\} = P\{(1,3)\} = P\{(2,2)\} = P\{(2,3)\} = 1/6$, $P\{(3,3)\} = 2/6$. Calcular:

1. la función de distribución bivariante asociada;
2. $P\{(x,y) \in I\!R^2 : x + y = 4\}$.

Solución

1. Considerando los distintos casos posibles, la función de distribución bivariante asociada es:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad y < 2 \\ 1/6 & \text{si} \quad 1 \le x < 2,\ 2 \le y < 3 \\ 1/3 & \text{si} \quad \begin{array}{l} 2 \le x,\ 2 \le y < 3 \\ 1 \le x < 2,\ y \ge 3 \end{array} \\ 2/3 & \text{si} \quad 2 \le x < 3,\ y \ge 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 3,\ y \ge 3 \end{cases}$$

2. Los únicos puntos con probabilidad no nula pertenecientes a la recta $x + y = 4$ son $(1,3)$ y $(2,2)$. Por lo tanto:

$$P\left(\left\{(x,y) \in I\!R^2 : x + y = 4\right\}\right) = P\left(\{(1,3)\}\right) + P\left(\{(2,2)\}\right) = 1/3.$$

P5.2] Sea una urna con 15 bolas rojas, 10 negras y 25 blancas. Se extraen 10 con reemplazamiento y al azar y se considera la variable aleatoria (ξ, η) donde ξ es "número de rojas"y η es "número de negras".

1. Calcular la función de probabilidad conjunta.
2. Hallar las funciones de distribución marginales.

Solución

1. La función de probabilidad conjunta viene dada, teniendo en cuenta que las bolas se extraen con reemplazamiento, por:

$$P(\xi = x, \eta = y) = \frac{10!}{x! \cdot y! \cdot (10-x-y)!} \cdot \left(\frac{15}{50}\right)^x \cdot \left(\frac{10}{50}\right)^y \cdot \left(\frac{25}{50}\right)^{10-x-y},$$

   para $x, y \in \{0, \ldots, 10\}$.

2. Las funciones de distribución de estas dos variables discretas son:

$$P(\xi = x) = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{15}{50}\right)^x \cdot \left(\frac{35}{50}\right)^{10-x},$$

$$P(\eta = y) = \binom{10}{y} \cdot \left(\frac{10}{50}\right)^y \cdot \left(\frac{40}{50}\right)^{10-y}.$$

P5.3] Sea el vector aleatorio (ξ, η) con función de probabilidad conjunta:

$$P(\xi = i, \eta = j) = \frac{\binom{3}{i}\binom{3}{j}\binom{4}{3-i-j}}{120}, \quad \begin{array}{l} i, j = 0, 1, 2, 3 \\ i + j \leq 3 \end{array}$$

Calcular $P(0 < \xi \leq 2, \eta = 3)$ y $P(\xi \geq 1)$.

Solución

Nótese que esta función de probabilidad conjunta toma valores no nulos para aquellos puntos (i, j)tales que $i, j = 0, 1, 2, 3$ y $i + j \leq 3$. Por lo tanto:

$$P(0 < \xi \leq 2, \eta = 3) = P(\xi = 1, \eta = 3) + P(\xi = 2, \eta = 3) = 0.$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 1) &= 1 - P(\xi = 0) = 1 - \sum_{j=0}^{3} P(\xi = 0, \eta = j) = \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{3} \frac{1}{120} \binom{3}{0} \binom{3}{j} \binom{4}{3-j} = \frac{17}{24}. \end{aligned}$$

P5.4] Una urna contiene tres bolas rojas, tres blancas y cuatro negras. Se extraen dos bolas de la urna, sin reemplazamiento. Sean las variables ξ y η definidas como $\xi = 1$ si la bola extraída en primer lugar es roja y 0 si no lo es, y $\eta = 1$ si la bola extraída en segundo lugar es roja y 0 si no lo es. Calcular las distribuciones conjuntas, marginales y condicionadas de (ξ, η). ¿Son ξ y η independientes?

Solución

La función de probabilidad conjunta, así como las funciones de probabilidad marginales, están expresadas en la siguiente tabla:

$\eta \mid \xi$	0	1	
0	$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$
1	$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{3}{10}$
	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Además:

$$P(\xi = x \mid \eta = y) = \frac{P(\xi = x, \eta = y)}{P(\eta = y)}, y = 0, 1,$$

por lo que:

$$P(\xi = x \mid \eta = 0) = \begin{cases} 2/3 & \text{, si} \quad x = 0 \\ 1/3 & \text{, si} \quad x = 1 \end{cases},$$

$$P(\xi = x \mid \eta = 1) = \begin{cases} 7/9 & \text{, si} \quad x = 0 \\ 2/9 & \text{, si} \quad x = 1 \end{cases}.$$

Finalmente, se puede afirmar que las variables ξ y η no son independientes, puesto que

$$P(\xi = x, \eta = y) \neq P(\xi = x) \cdot P(\eta = y),$$

para todo $x, y \in \{0, 1\}$.

P5.5] Repetir el problema anterior suponiendo que las extracciones se hacen con reemplazamiento.

Solución

De forma similar al caso anterior:

$\eta \mid \xi$	0	1	
0	$\frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}$	$\frac{7}{10}$
1	$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

y además:

$$P\left(\xi = x \mid \eta = 0\right) = \begin{cases} 7/10 & \text{, si} \quad x = 0 \\ 3/10 & \text{, si} \quad x = 1 \end{cases} ,$$

$$P\left(\xi = x \mid \eta = 1\right) = \begin{cases} 7/10 & \text{, si} \quad x = 0 \\ 3/10 & \text{, si} \quad x = 1 \end{cases} .$$

Finalmente, se puede afirmar que las variables ξ y η son independientes, puesto que

$$P\left(\xi = x, \eta = y\right) = P\left(\xi = x\right) \cdot P\left(\eta = y\right),$$

para todo $x, y = 0, 1$.

P5.6] El vector aleatorio (ξ, η) tiene la distribución de probabilidad conjunta dada por $P(\xi = x, \eta = y) = k(x+1)(y+1)$ donde $x, y = 0, 1, 2$.

1. Calcular el valor de k.
2. Calcular las distribuciones marginales.
3. Distribuciones de ξ condicionada a $\eta = y$ $(y = 0, 1, 2)$.
4. ¿Son independientes ξ y η?
5. Calcular $P(\xi + \eta > 2)$ y $P(\xi^2 + \eta^2 \leq 1)$.
6. Distribuciones de $Z = \xi + \eta$ y de $\varphi = \xi^2 + \eta^2$.

Solución

1. El valor de k es aquél para el que se verifica:

$$\sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} k(x+1)(y+1) = 36k = 1,$$

es decir, $k = 1/36$.

2. Las distribuciones marginales son:

$$P\left(\xi = x\right) = \sum_{y=0}^{2} \frac{(x+1)(y+1)}{36} = \frac{x+1}{6}, \text{ para } x = 0, 1, 2.$$

$$P\left(\eta = y\right) = \sum_{x=0}^{2} \frac{(x+1)(y+1)}{36} = \frac{y+1}{6}, \text{ para } y = 0, 1, 2.$$

3. La distribución de ξ condicionada a $\eta = y$ $(y = 0, 1, 2)$ es:

$$P\left(\xi = x \mid \eta = y\right) = \frac{P\left(\xi = x, \eta = y\right)}{P\left(\eta = y\right)} = \frac{x+1}{6}, \text{ para } x = 0, 1, 2.$$

4. Las variables ξ y η son independientes, pues

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x) \cdot P(\eta = y),$$

para todo $x, y = 0, 1, 2$. O, alternativamente, porque

$$P(\xi = x \mid \eta = y) = P(\xi = x),$$

para todo $x, y = 0, 1, 2$.

5. Se tiene que

$$P(\xi + \eta > 2) = P(\xi = 1, \eta = 2) + P(\xi = 2, \eta = 1)$$

$$+P(\xi = 2, \eta = 2) = \frac{7}{12}.$$

$$P(\xi^2 + \eta^2 \leq 1) = P(\xi = 0, \eta = 0)$$

$$+P(\xi = 0, \eta = 1) + P(\xi = 1, \eta = 0) = \frac{5}{36}.$$

6. A partir de la función de probabilidad conjunta del vector aleatorio (ξ, η) se concluye que la variable $Z = \xi + \eta$ tiene distribución:

z	$P(Z = z)$
0	1/36
1	1/19
2	5/18
3	1/13
4	1/14

y $\varphi = \xi^2 + \eta^2$:

w	$P(\varphi = w)$
0	1/36
1	1/19
2	1/14
3	0
4	1/16
5	1/13
6	0
7	0
8	1/14

P5.7] Consideremos una urna con 3 bolas azules, 2 blancas y 1 roja. Extraemos 3 bolas sin reemplazamiento, y consideremos las variables aleatorias que nos dan el número ξ de bolas azules y el número η de bolas blancas que aparecen en la extracción. Calcular la distribución de probabilidad conjunta.

Solución

	$\xi=0$	$\xi=1$	$\xi=2$	$\xi=3$
$\eta=0$	0	0	3/20	1/20
$\eta=1$	0	6/20	6/20	0
$\eta=2$	1/20	3/20	0	0

P5.8] Definimos sobre el experimento de lanzar diez veces una moneda las variables aleatorias ξ como el "número de lanzamiento en el que aparece la primera cara (si no aparece cara $\xi = 0$)", y η como el "número de lanzamiento en el que aparece la primera cruz" (con $\eta = 0$ si no aparece cruz).

1. Calcular la función de probabilidad conjunta.
2. Calcular las distribuciones marginales.
3. Distribuciones de ξ condicionada a $\eta = y$ ($y = 0.,10$).
4. ¿Son independientes ξ y η?
5. Probabilidad de que $|\xi - \eta| \geq 1$.

Solución

1. Nótese que si una de las dos variables (ξ o η) toma un valor mayor que 1 o bien igual a cero, la probabilidad $P(\xi = x, \eta = y)$ será nula si la otra variable toma un valor distinto de 1. Por lo tanto $P(\xi = x, \eta = y)$ es:

$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} & \text{, si} \quad x = 1,\, y = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \sum\limits_{i=0}^{10-y} \binom{10-y}{i} = 1/2^y & \text{, si} \quad x = 1,\, y = 2, \dots, 10 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{10} & \text{, si} \quad x = 0,\, y = 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \sum\limits_{j=0}^{10-x} \binom{10-x}{j} = 1/2^x & \text{, si} \quad x = 2, \dots, 10,\, y = 1 \end{cases}$$

2. Las correspondientes distribuciones marginales son:

- $P(\xi = x) = \sum_{y=0}^{10} P(\xi = x, \eta = y) =$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} & , \text{si} \quad x = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \sum\limits_{y=2}^{10} 1/2^y = 1/2 & , \text{si} \quad x = 1 \\ \frac{1}{2^x} & , \text{si} \quad x = 2, \ldots, 10 \end{cases}$$

- $P(\eta = y) = \sum_{x=0}^{10} P(\xi = x, \eta = y) =$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} & , \text{si} \quad y = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \sum\limits_{x=2}^{10} 1/2^x = 1/2 & , \text{si} \quad y = 1 \\ \frac{1}{2^y} & , \text{si} \quad y = 2, \ldots, 10 \end{cases}$$

3. Si $y = 0$:

$$P(\xi = 1 \mid \eta = 0) = \frac{P(\xi = x, \eta = 0)}{P(\eta = 0)} = 1,$$

si $y = 1$:

$$P(\xi = x \mid \eta = 1) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^9 & , \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{1}{2^{x-1}} & , \text{si} \quad x = 2, \ldots, 10 \end{cases}$$

y por último, si $y = 2, \ldots, 10$:

$$P(\xi = 1 \mid \eta = y) = \frac{1}{2^{y-1}}.$$

4. Las variables aleatorias ξ y η no son independientes, pues, por ejemplo:

$$P(\xi = 2, \eta = 1) = \frac{1}{2^2} \neq P(\xi = 2) \cdot P(\eta = 1) = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2}.$$

5. Finalmente:

$$P(|\xi - \eta| \geq 1) = 1 - P(|\xi - \eta| = 0)$$

$$= 1 - P(\xi = \eta) = 1 - \sum_{i=0}^{10} P(\xi = i, \eta = i) = 1.$$

P5.9] En una jaula hay un ratón y dos pollitos. La probabilidad de que cada uno de los animales salga de la jaula en la próxima hora es de 0.3. Esperamos una hora y observamos lo que queda en la jaula.

1. ¿Cómo se distribuye la variable aleatoria ξ que cuenta el número de animales que quedan en la jaula?
2. Si η es el número total de patas de los animales que hay en la jaula, dar la distribución conjunta de (ξ, η). ¿Son ξ y η independientes?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de patas no supere al doble del número de animales?

Solución

1. La variable aleatoria ξ que cuenta el número de animales que quedan en la jaula tiene la siguiente distribución:

$$P(\xi = x) = \binom{3}{x} \cdot 0{,}3^{3-x} \cdot 0{,}7^{x}, \text{ para } x = 0, 1, 2, 3.$$

2. La distribución de probabilidad conjunta del vector aleatorio (ξ, η) es:

$\eta \mid \xi$	0	1	2	3	
0	0,027	0	0	0	0,027
2	0	0,126	0	0	0,126
4	0	0,063	0,147	0	0,21
6	0	0	0,294	0	0,294
8	0	0	0	0,343	0,343
	0,027	0,189	0,441	0,343	1

Además, las variables ξ y η no son independientes, pues:

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = 0{,}3^3 \neq P(\xi = 0) \cdot P(\eta = 0) = 0{,}3^6.$$

3. La probabilidad de que el número de patas no supere al doble del número de animales viene dada por:

$$P(\eta \leq 2\xi) = P(\xi = 0, \eta = 0) + P(\xi = 1, \eta = 2) + P(\xi = 2, \eta = 4) = 0{,}3.$$

Esto puede observarse en la figura 5.1.

P5.10] Sea (ξ, η) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad $f(x, y) = 24y(1 - x - y)$, si (x, y) pertenece al recinto limitado por las rectas $x + y = 1, x = 0, y = 0$.

1. Calcular la función de distribución de la variable aleatoria bidimensional (ξ, η).
2. Calcular las funciones de densidad marginales.
3. Calcular las funciones de densidad condicionadas.

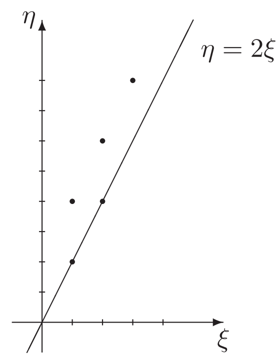

FIGURA 5.1: Diagrama para el ejercicio P5.9.

y

R_4 R_6

R_3

R_5

R_2

x

R_1

FIGURA 5.2: Regiones del plano para el problema P5.10.

Solución

Dividimos $\mathbb{R}^2$ en distintas regiones según muestra la figura 5.2, y en cada una se obtiene:

- si $(x, y) \in R_1$:
$$F(x, y) = 0;$$
- si $(x, y) \in R_2$:
$$F(x, y) = \int_0^x \left(\int_0^y 24t\,(1-s-t)\,\partial t \right) \partial s = 12y^2x - 6y^2x^2 - 8y^3x;$$
- si $(x, y) \in R_3$:
$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^{1-y} \left(\int_0^y 24t\,(1-s-t)\,\partial t \right) \partial s \\ &\quad + \int_{1-y}^x \left(\int_0^{1-s} 24t\,(1-s-t)\,\partial t \right) \partial s \\ &= y^2(2y^2 - 8y + 6) - (1-x)^4 + y^4; \end{aligned}$$
- si $(x, y) \in R_4$:
$$F(x, y) = \int_0^x \left(\int_0^{1-s} 24t\,(1-s-t)\,\partial t \right) \partial s = 1 - (1-x)^4;$$
- si $(x, y) \in R_5$:
$$F(x, y) = \int_0^y \left(\int_0^{1-t} 24t\,(1-s-t)\,\partial s \right) \partial t = y^2(3y^2 - 8y + 6);$$
- si $(x, y) \in R_6$:
$$F(x, y) = 1.$$

Las correspondientes funciones de densidad marginales son:

$$\begin{aligned} f_\xi(x) &= \int_0^{1-x} 24y\,(1-x-y)\,\partial y = \left[\frac{24y^2}{2}(1-x) - \frac{24y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} = \\ &= 12\,(1-x)^3 - 8\,(1-x)^3 = 4\,(1-x)^3, \text{ para } 0 \le x \le 1. \\ f_\eta(y) &= \int_0^{1-y} 24y\,(1-x-y)\,\partial x = \left[24y\,(1-y)\,x - 12yx^2 \right]_{x=0}^{x=1-y} = \\ &= 24y\,(1-y)^2 - 12y\,(1-y)^2 = 12y\,(1-y)^2, \text{ para } 0 \le y \le 1. \end{aligned}$$

y

R_3 R_5

R_4

R_2

x

R_1

Figura 5.3: Regiones del plano para el problema P5.11.

Por último, las funciones de densidad condicionadas son:

$$f_{\xi|\eta=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)} = \frac{24y(1-x-y)}{12y(1-y)^2} = \frac{2(1-x-y)}{(1-y)^2}$$

para $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1-y$, y

$$f_{\eta|\xi=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{24y(1-x-y)}{4(1-x)^3} = \frac{6y(1-x-y)}{(1-x)^3}$$

para $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$.

P5.11] Sea (ξ, η) una variable aleatoria bidimensional con función de distribución uniforme en el recinto limitado por $y = x/2, x = 2, y = 0$. Calcular la función de distribución.

Solución

El recinto propuesto en el enunciado es el triángulo sombreado en la figura 5.3. Dado que la función de distribución es uniforme, entonces $f_{\xi,\eta}(x,y) = k$ para k un valor constante en el recinto y las integrales se reducen al cálculo de áreas. Así:

$$\int_0^2 \int_0^{x/2} k \partial y \partial x = 1,$$

es decir, $k = 1$. Por tanto, la función de distribución es:

- si $(x,y) \in R_1$:
$$F(x,y) = 0;$$
- si $(x,y) \in R_2$:
$$F(x,y) = xy - y^2;$$

y

R_4 R_6

R_3

R_2 R_5

R_1 x

FIGURA 5.4: Regiones del plano para el problema P5.12.

- si $(x, y) \in R_3$:
$$F(x, y) = \frac{x^2}{4};$$
- si $(x, y) \in R_4$:
$$F(x, y) = y(2 - y);$$
- si $(x, y) \in R_5$:
$$F(x, y) = 1.$$

P5.12] Sea (ξ, η) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recinto:

$$C = \left\{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

1. Calcular la función de distribución conjunta.
2. Calcular las funciones de densidad marginales.
3. Calcular las funciones de densidad condicionadas.

Solución

1. Consideremos las zonas del plano indicadas en la figura 5.4. La función de densidad es $f(x, y) = 4/\pi$ cuando (x, y) está en R_2, y $f(x, y) = 0$ cuando (x, y) está fuera de R_2. Para calcular la función de distribución es útil el siguiente resultado:
$$\int \sqrt{1 - x^2} \cdot \partial x = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathsf{arcsen} x + x \cdot \sqrt{1 - x^2}\right) + c.$$
De este modo, considerando un punto (x, y) arbitrario pero fijo:

- si $(x,y) \in R_1$:
$$F(x,y) = 0;$$
- si $(x,y) \in R_2$:
$$F(x,y) = \int_0^y \left(\int_0^x \frac{4}{\pi} \partial s \right) \partial t = xy$$
- si $(x,y) \in R_3$:
$$F(x,y) = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_0^y \frac{4}{\pi} \partial t \right) \partial s + \int_{\sqrt{1-y^2}}^x \left(\int_0^{\sqrt{1-s^2}} \frac{4}{\pi} \partial t \right) \partial s =$$
$$\frac{4}{\pi} \left(y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \left(\mathsf{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2} - \mathsf{arcsen} \sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-y^2} \right) \right);$$
- si $(x,y) \in R_4$:
$$F(x,y) = \int_0^x \left(\int_0^{\sqrt{1-s^2}} \frac{4}{\pi} \partial t \right) \partial s = \frac{2}{\pi} \left(\mathsf{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2} \right);$$
- si $(x,y) \in R_5$:
$$F(x,y) = \int_0^y \left(\int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{4}{\pi} \partial s \right) \partial t = \frac{2}{\pi} \left(\mathsf{arcsen} y + y\sqrt{1-y^2} \right);$$
- si $(x,y) \in R_6$:
$$F(x,y) = 1.$$

2. Las funciones de densidad marginales son:
$$f_\xi(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{4}{\pi} \partial y = \frac{4}{\pi} \sqrt{1-x^2}$$
si $0 < x < 1$, y $f_\xi(x) = 0$ en el resto; y
$$f_\eta(y) = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi} \partial x = \frac{4}{\pi} \sqrt{1-y^2}$$
si $0 < y < 1$, y $f_\eta(y) = 0$ en el resto.

3. Para todo $x \in [0,1]$:
$$f_{\eta|\xi=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
si $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$ y cero en el resto. Dado que para la variable condicionada el valor de x es un parámetro fijo, su distribución ha resultado uniforme en el intervalo $[0, \sqrt{1-x^2}]$. De forma similar la variable ξ condicionada a $\eta = y$ sigue una distribución uniforme en $[0, \sqrt{1-y^2}]$ cuando $y \in [0,1]$.

P5.13] Sea una muestra aleatoria simple de tamaño n, obtenida de una distribución uniforme en $[0,1]$. Sean $\eta = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ y $\zeta = \min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Se pide:

1. Calcular las distribuciones de η, de ζ y de la conjunta.
2. Función de densidad condicionada de η dado ζ.
3. Función de densidad condicionada de ζ dado η.
4. Esperanza de η, η^2 y varianza de η.
5. Esperanza de ζ, ζ^2 y varianza de ζ.
6. Esperanza condicionada de η dada ζ.

Solución

1. Para $w \in [0,1]$ se tiene:

$$F_\eta(w) = P\left(\max_i \xi_i \le w\right) = P(\xi_1 \le w, \ldots, \xi_n \le w).$$

Nótese que las variables aleatorias $\xi_1, \ldots, \xi_n$ son independientes y están idénticamente distribuidas, por lo que se puede afirmar que:

$$P(\xi_1 \le w, \ldots, \xi_n \le w) = [P(\xi \le w)]^n,$$

obteniéndose así que

$$F_\eta(w) = w^n, \text{ para } 0 \le w \le 1.$$

Por otra parte, y procediendo de forma análoga al caso anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned} F_\zeta(z) &= P\left(\min_i \xi_i \le z\right) = 1 - P\left(\min_i \xi_i > z\right) = \\ &= 1 - P(\xi_1 > z, \ldots, \xi_n > z) = 1 - [P(\xi > z)]^n \\ &= 1 - (1-z)^n, \text{ para } 0 \le z \le 1. \end{aligned}$$

Como se verifica que $0 \le \min_i \xi_i \le \max_i \xi_i \le 1$, el vector (η, ζ) se distribuye en la región comprendida entre las rectas $z = w$, $w = 1$, $z = 0$. Vamos a hallar la función de distribución en el interior de esta región, ya que la función de densidad se obtiene derivando en esa zona. La función de distribución conjunta es:

$$\begin{aligned} F_{\eta,\zeta}(w,z) &= P\left(\max_i \xi_i \le w, \min_i \xi_i \le z\right) \\ &= P\left(\max_i \xi_i \le w\right) - P\left(\max_i \xi_i \le w, \min_i \xi_i > z\right) \\ &= F_\eta(w) - [P(z < \xi \le w)]^n = w^n - (w-z)^n, \end{aligned}$$

para $0 \le w \le 1, z \le w$.

2. A partir de lo anterior se obtiene que:

$$\begin{aligned} f_{\eta}(w) &= nw^{n-1}, 0 \leq w \leq 1, \\ f_{\zeta}(z) &= n(1-z)^{n-1}, 0 \leq z \leq 1, \\ f_{\eta,\zeta}(w,z) &= n(n-1)(w-z)^{n-2}, 0 \leq w \leq 1, z \leq w, \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$f_{\eta|\zeta=z}(w) = \frac{f_{\eta,\zeta}(w,z)}{f_{\zeta}(z)} = \frac{(n-1)(w-z)^{n-2}}{(1-z)^{n-1}}, z \leq w \leq 1.$$

3. Análogamente,

$$f_{\zeta|\eta=w}(z) = \frac{f_{\eta,\zeta}(w,z)}{f_{\eta}(w)} = \frac{(n-1)(w-z)^{n-2}}{w^{n-1}}, 0 \leq z \leq w.$$

4. Utilizando los resultados del apartado anterior se obtiene que:

$$\begin{aligned} E[\eta] &= \int_0^1 wnw^{n-1}\partial w = \frac{n}{n+1}, \\ E\left[\eta^2\right] &= \int_0^1 w^2 nw^{n-1}\partial w = \frac{n}{n+2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$V(\eta) = E\left[\eta^2\right] - (E[\eta])^2 = \frac{-n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

5. De la misma forma, se obtiene:

$$\begin{aligned} E[\zeta] &= \int_0^1 zn(1-z)^{n-1}\partial z = \frac{1}{n+1}, \\ E\left[\zeta^2\right] &= \int_0^1 z^2 n(1-z)^{n-1}\partial z = \frac{2}{(n+3)(n+2)(n+1)}, \\ V(\zeta) &= \frac{2}{(n+3)(n+2)(n+1)} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2. \end{aligned}$$

6. Por último:

$$\begin{aligned} E[\eta \mid \zeta = z] &= \int_z^1 w \cdot f_{\eta|\zeta=z}(w) \cdot \partial w \\ &= \frac{n-1}{(1-z)^{n-1}} \cdot \int_z^1 w(w-z)^{n-2}\partial w \\ &= 1 - \frac{1-z}{n}, \text{ para } 0 \leq z \leq 1. \end{aligned}$$

P5.14] Dado el intervalo $[0,1]$, se eligen al azar tres números a, b y c y con ellos construimos la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Calcular la probabilidad de que tenga soluciones reales.

Solución

Para que esta ecuación tenga soluciones reales, el discriminante, $b^2 - 4ac$, ha de ser mayor o igual que cero. Por lo tanto, la probabilidad deseada es $P\left(B^2 - 4AC \geq 0\right)$, donde A, B y C son variables aleatorias con distribución uniforme sobre el intervalo $[0,1]$. Para ello, vamos a considerar una nueva variable aleatoria $\xi = AC$, con función de densidad $f_\xi(x)$. Se tiene entonces que:

$$P\left(B^2 - 4AC \geq 0\right) = 1 - P\left(B^2 - 4AC < 0\right) = 1 - P\left(B < \sqrt{4AC}\right) =$$

$$= 1 - \int_0^{1/4} \left(\int_0^{2\sqrt{x}} f_B(b) \cdot \partial b\right) \cdot f_\xi(x) \cdot \partial x - \int_{1/4}^{1} \left(\int_0^{1} f_B(b) \cdot \partial b\right) \cdot f_\xi(x) \cdot \partial x.$$

Ahora bien, la función de densidad de la variable aleatoria ξ se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned} F_\xi(x) &= P(\xi \leq x) = P(AC \leq x) = \\ &= \int_0^x \left(\int_0^1 f_C(c) \cdot \partial c\right) \cdot f_A(a) \cdot \partial a \\ &\quad + \int_x^1 \left(\int_0^{x/a} f_C(c) \cdot \partial c\right) \cdot f_A(a) \cdot \partial a = \\ &= x - x \ln x, \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$f_\xi(x) = \frac{\partial F_\xi(x)}{\partial x} = -\ln x, \text{ para } x \in [0,1].$$

Sustituyendo en el desarrollo anterior se tiene que:

$$P\left(B^2 - 4AC \geq 0\right) = 1 - \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{9} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{5}{36} + \frac{1}{6}\ln 2 = 0,2544.$$

Antes de terminar conviene observar que, aunque a sea distinto de cero con probabilidad 1, no conviene dividir por a y estudiar la ecuación $x^2 + (b/a)x + (c/a) = 0$, ya que, aunque A, B, C sean independientes, las variables B/A y C/A no lo son.

P5.15] Sea $f(x,y) = cye^x, x \leq y \leq 0$; $f(x,y) = 0$ en el resto.

1. Calcular c y obtener las funciones de distribución conjunta, marginales y condicionadas. Expresar y comprobar la relación que hay entre ellas.

y

R_4 R_3

x

R_1

R_2

FIGURA 5.5: Regiones del plano para el problema P5.15.

2. Calcular la esperanza de η dado $\xi + 2 = 0$, la función característica de η dado $\eta + 2 \leq 0$; la función de distribución de η dado $\xi + 2 \leq 0 \leq \eta + 2$; y la función de densidad de η dado $\xi + \eta + 2 \geq 0$.

Solución

1. La función $f(x, y) = cye^x$ debe verificar:

$$\int_{-\infty}^{0} \left(\int_{x}^{0} cye^x \partial y \right) \partial x = 1,$$

y esto se cumple si $c = -1$.

Para obtener la función de distribución conjunta, debemos dividir el plano en diferentes regiones y estudiar el valor de la probabilidad $F(x, y) = P(\xi \leq x, \eta \leq y)$ en cada una. Se tiene:

- si $x \leq y \leq 0$:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{s}^{y} -te^s \partial t \right) \partial s = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 - \frac{y^2}{2} \right) e^x,$$

- si $y \leq x$:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{s}^{y} -te^s \partial t \right) \partial s = (1 - y) e^y,$$

- si $x \leq 0, y \geq 0$:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{t}^{0} -te^s \partial t \right) \partial s = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 \right) e^x,$$

- en otro caso:

$$F(x,y)=1.$$

Por otra parte, las correspondientes funciones de distribución marginales son:

$$\begin{aligned}
F_{\xi}(x) &= \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{s}^{0} -te^{s}\partial t\right)\partial s=\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)e^{x}\text{ , para } x\leq 0.\\
F_{\eta}(y) &= \int_{-\infty}^{y}\left(\int_{s}^{y} -te^{s}\partial t\right)\partial s=(1-y)\,e^{y}\text{ , para } y\leq 0.
\end{aligned}$$

Las funciones de distribución condicionadas son:

- Si $y\leq 0$:

$$F_{\xi|\eta=y}(x)=\begin{cases}\frac{\int_{-\infty}^{x}-ye^{s}\partial s}{\int_{-\infty}^{y}-ye^{s}\partial s}=e^{x-y} & \text{si } x\leq y\\ 1 & \text{si } y<x.\end{cases}$$

- Si $x\leq 0$:

$$F_{\eta|\xi=x}(y)=\begin{cases}\frac{\int_{x}^{y}-te^{x}\partial t}{\int_{x}^{0}-te^{x}\partial t}=1-\left(\frac{y}{x}\right)^2 & \text{si } x\leq y\leq 0\\ 1 & \text{si } y\geq 0\\ 0 & \text{si } y<x.\end{cases}$$

2. Se obtiene que:

$$E\left[\eta\mid\xi+2=0\right]=E\left[\eta\mid\xi=-2\right]=\int_{-2}^{0} y f_{\eta|\xi=-2}(y)\,\partial y=-\frac{4}{3}.$$

Además, la función característica de η dado $\eta+2\leq 0$ es:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\eta|\eta\leq -2}(t) &= E\left[e^{it\eta}\mid\eta\leq -2\right]=\frac{1}{P(\eta\leq -2)}\int_{-2}^{0} e^{ity}f_{\eta}(y)\,\partial y\\
&= \frac{1}{F_{\eta}(-2)}\int_{-2}^{0} e^{ity}\left(-e^{y}+(1-y)\,e^{y}\right)\partial y\\
&= \frac{-e^{2}+e^{-it}}{3}\left(\frac{1}{it+1}\right)-\frac{2}{3}\frac{e^{-it}}{it+1}.
\end{aligned}$$

Y la función de distribución de η dado $\xi+\eta+2\geq 0$ es:

$$\begin{aligned}
F_{\eta|\xi+\eta+2\geq 0}(y) &= F_{\eta|\xi\leq -2\leq\eta}(y)=\\
&= P_{\eta|\xi\leq -2\leq\eta}(\eta\leq y)=\\
&= \frac{P(\xi\leq -2\leq y)}{P(\xi\leq -2\leq\eta)}\\
&= \frac{F(-2,y)-F(-2,-2)}{F(-2,0)-F(-2,-2)}=\\
&= 1-\frac{y^2}{4},\text{ para } -2\leq y\leq 0.
\end{aligned}$$

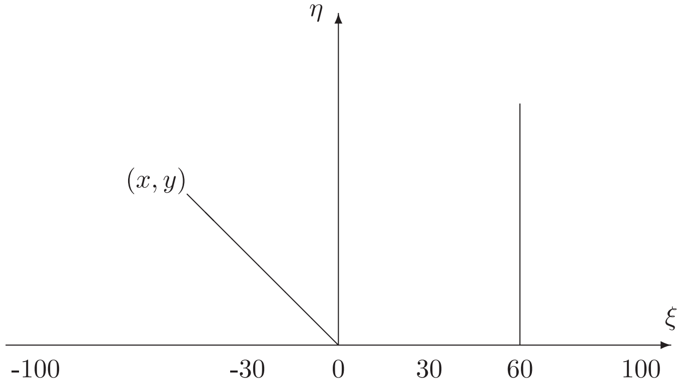

FIGURA 5.6: Plano del teatro del ejercicio P5.16.

Por último, para obtener la función de densidad de η dado $\xi + \eta + 2 \geq 0$, calculemos primero la correspondiente función de distribución para posteriormente derivar. Así, se obtiene que:

$$\begin{aligned} F_{\eta|\xi+\eta+2\geq 0}(y) &= \frac{P(\eta \leq y, \xi + \eta \geq -2)}{P(\xi + \eta \geq -2)} = \\ &= \frac{\int_{-1}^{y} \left(\int_{-2-t}^{t} -te^{s} \partial s \right) \partial t}{\int_{-1}^{0} \left(\int_{-2-t}^{t} -te^{s} \partial s \right) \partial t} = \\ &= \frac{e^{y}(y-1) + e^{-2-y}(y+1) + 2e^{-1}}{e^{-2} + 2e^{-1} - 1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tras derivar en la anterior expresión se obtiene:

$$f_{\eta|\xi+\eta+2\geq 0}(y \mid \xi + \eta + 2 \geq 0) = \frac{ye^{y} - ye^{-2-y}}{e^{-2} + 2e^{-1} - 1}.$$

P5.16] Un teatro romano tiene las gradas en forma de semianillo circular con las dimensiones de la figura 5.16. Cuando se compra una entrada cada asiento es equiprobable (distribución uniforme en las gradas).

1. Calcular la función de densidad de la variable aleatoria T que mide la distancia entre el lugar al que corresponde una entrada (el punto (x, y) y el centro del escenario (el origen 0).
2. Calcular la función característica de T y a partir de ella obtener su varianza.
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el sitio esté a la sombra, esto es, a más de 60 metros a la derecha del eje η? Hallar la posición media en este caso.

Solución

1. El área de las gradas es $\pi\left(100^2-30^2\right)/2$, y por tanto:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi(100^2-30^2)} & \text{, si el punto } (x,y) \text{ pertenece a las gradas}\\ 0 & \text{, en otro caso}\end{cases}$$

Para hallar la función de densidad de la distancia al origen, obtengamos primero:

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(\text{distancia al centro} < t) = \frac{\frac{\pi\left(t^2-30^2\right)}{2}}{\frac{\pi(100^2-30^2)}{2}} = \\ &= \frac{t^2-30^2}{100^2-30^2}=\frac{t^2-900}{9100}, \end{aligned}$$

para $30\le t\le 100$, y derivando en la anterior expresión se concluye que:

$$f_T(t)=\frac{t}{4550} \qquad \text{para } 30\le t\le 100.$$

Nótese que la función de distribución de la variable se ha obtenido a partir de las áreas de los correspondientes semianillos circulares.

2. La función característica de la variable aleatoria T es:

$$\varphi_T(s)=E\left[e^{isT}\right]=E\left[\cos(sT)\right]+iE\left[\operatorname{sen}(sT)\right],$$

donde:

$$E\left[\cos(sT)\right]=\int_{30}^{100}\cos(st)\,\frac{t}{4550}\partial t=$$

$$=\frac{1}{4550}\frac{\cos(100s)+100s\operatorname{sen}(100s)-\cos(30s)-30s\operatorname{sen}(30s)}{s^2},$$

mientras que:

$$E\left[\operatorname{sen}(sT)\right]=$$

$$-\frac{1}{4550}\frac{-\operatorname{sen}(100s)+100s\cos(100s)+\operatorname{sen}(30s)-30s\cos(30s)}{s^2}.$$

Se obtiene finalmente que:

$$\varphi_T(s)=\frac{is\left(100e^{is100}-30e^{is30}-e^{is100}+e^{is30}\right)}{s^2}.$$

Además, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial^{k)}\varphi_T(s)}{\partial s^k}\Big|_{s=0}=m_k,\ k=1,2,\ldots$$

se obtiene:

$$V(T)=m_2-m_1^2=\frac{\partial^{2)}\varphi_T(s)}{\partial s^2}\Big|_{s=0}-\left(\frac{\partial\varphi_T(s)}{\partial s}\Big|_{s=0}\right)^2.$$

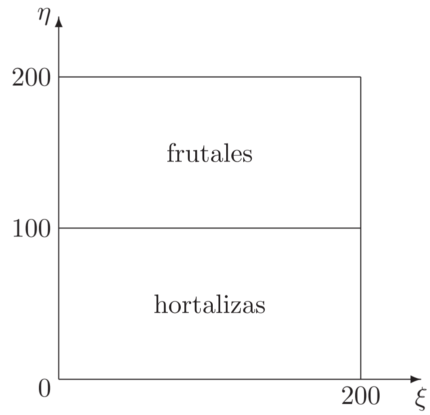

FIGURA 5.7: Plano de la finca del ejercicio P5.17.

3. Para obtener la probabilidad de estar a la sombra se calcula el área de la zona a la sombra:

$$\int_{60}^{100}\left(\int_{0}^{\sqrt{100^2-x^2}}\partial y\right)\partial x=\int_{60}^{100}\sqrt{100^2-x^2}\partial x=2236{,}5,$$

y por lo tanto, la probabilidad que se pide es:

$$\frac{2236{,}5}{\frac{\pi(100^2-30^2)}{2}}=0.\,15646.$$

P5.17] Una finca cuadrada cuyo lado mide 200 metros está dividida en dos partes iguales, una con frutales y otra con hortalizas, tal como muestra la figura 5.7. En la esquina 0 duerme el perro guardián. Cuando el perro se despierta, si detecta la presencia de un intruso sale en su persecución moviéndose sólo en las direcciones de los ejes. El ladrón, que queda inmóvil al despertarse el perro, se encontrará en un punto aleatorio de la finca (ξ,η). La primera coordenada ξ tiene función de densidad $f_\xi(x)=x/2000$ si $0\leq x\leq 200$; y cero en otro caso. La segunda coordenada η se distribuye uniformemente dentro de cada cultivo, pero la probabilidad de encontrarse en los frutales es doble que en las hortalizas. El perro corre a 10 m/s.

1. Hallar la función de distribución de la coordenada η.
2. Hallar la función de densidad del tiempo que tarda en coger al intruso.
3. Hallar la primera coordenada de la posición media en que se da caza, en menos de 15 segundos, a un ladrón que se encuentra en los frutales.

Solución

1. De acuerdo con los datos del problema, la función de densidad de la variable η es de la forma:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{, si} \quad 0 \le y \le 100 \\ \\ \frac{2}{a} & \text{, si} \quad 100 < y \le 200 \end{cases}$$

Además, debe verificarse:

$$\int_0^{100} \frac{1}{a} \cdot \partial y + \int_{100}^{200} \frac{2}{a} \cdot \partial y = 1,$$

Efectuando los cálculos correspondientes se obtiene:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 1/300 & \text{si} \quad 0 \le y \le 100 \\ 2/300 & \text{si} \quad 100 < y \le 200 \end{cases}$$

y, por lo tanto, ya que ξ y η son variables aleatorias independientes, se tiene:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{300}\frac{x}{2000} = \frac{x}{600000} & \text{si} \quad 0 \le y \le 100, \quad 0 \le x \le 200, \\ \frac{2}{300}\frac{x}{2000} = \frac{x}{300000} & \text{si} \quad 100 < y \le 200, \quad 0 < x \le 200. \end{cases}$$

Es decir, la distribución marginal es $x/(3 \cdot 10^5)$ en los frutales y $x/(6 \cdot 10^5)$ en las hortalizas.

2. En primer lugar calculemos la probabilidad de que tarde menos de t segundos en coger al intruso, es decir, la función de distribución de la variable T en el punto t. Dado que para llegar a un punto (x, y) el perro debe recorrer $x + y$ metros, entonces dicha probabilidad es equivalente a la de que el intruso se encuentre en un punto (x, y) que verifique $(x + y)/10 \le t$. Hay que distinguir varios casos:

   - Si $0 \le t \le 10$:

   $$F_T(t) = \int_0^{10t} \int_0^{10t-y} \frac{x}{6 \cdot 10^5} \partial x \partial y = \frac{t^3}{3600}$$

   - Si $10 < t \le 20$:

   $$F_T(t) = \int_0^{100} \int_0^{10t-y} \frac{x}{6 \cdot 10^5} \partial x \partial y + \int_{100}^{10t} \int_0^{10t-y} \frac{x}{3 \cdot 10^5} \partial x \partial y$$

   - Si $20 < t \le 30$:

   $$F_T(t) = \int_0^{100} \int_0^{10t-y} \frac{x}{6 \cdot 10^5} \partial x \partial y + \int_{100}^{200} \int_0^{10t-y} \frac{x}{3 \cdot 10^5} \partial x \partial y$$

- Si $30 < t \leq 40$:

$$F_T(t) = \int_0^{100} \int_0^{200} \frac{x}{6 \cdot 10^5} \partial x \partial y + \int_{100}^{200} \int_0^{10t-y} \frac{x}{3 \cdot 10^5} \partial x \partial y$$

- Si $40 < t$:

$$F_T(t) = 1.$$

Derivando $F_T(t)$ se obtiene la función de densidad deseada. Otra alternativa más propia de este capítulo consiste en calcular la función de densidad conjunta de la variable (T, S), donde $T := (\xi + \eta)/10$ y $S := \xi$, teniendo presente que conocemos la función de densidad de la variable (ξ, η). Concretamente, dado que $\xi = S$ y $\eta = 10T - S$ entonces $f_{T,S}(t, s) = 10 \cdot f_{\xi,\eta}(s, 10t - s)$.

3. Se desea ahora calcular el valor esperado de ξ supuesto que $\eta \geq 100$ y $\xi + \eta \leq 150$. La función de distribución de esta variable aleatoria condicionada Z es:

$$F_Z(z) = \frac{P(\xi \leq z, \eta \geq 100, \xi + \eta \leq 150)}{P(\eta \geq 100, \xi + \eta \leq 150)}$$

Claramente los valores relevantes suceden para $0 \leq z \leq 50$, y para cada uno:

$$F_Z(z) = \frac{\int_0^z \int_{100}^{150-x} (x/300000) \partial y \partial x}{\int_0^{50} \int_{100}^{150-x} (x/300000) \partial y \partial x} = \frac{150z^2 - 2z^3}{125000}.$$

La función de densidad es:

$$f_Z(z) = \frac{300z - 6z^2}{125000}$$

y por tanto la esperanza solicitada es:

$$E[Z] = \int_0^{50} z f_Z(z) \partial z = 25.$$

CAPÍTULO 6

Convergencia

- Sea $\{F_{\xi_n}\}$ una sucesión de funciones de distribución. Si existe una función de distribución F_ξ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x),$$

en todo punto x en el que F_ξ sea continua, diremos que F_{ξ_n} *converge en ley* a F_ξ, y se denota $F_{\xi_n} \xrightarrow{L} F_\xi$, o, equivalentemente, $\xi_n \xrightarrow{L} \xi$.

- Sea $\{\xi_n\}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre el espacio de probabilidad (Ω, φ, P). Se dice que la sucesión *converge en probabilidad* a una variable aleatoria ξ si, para cualquier $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(\{w \in \Omega : |\xi_n(w) - \xi(w)| > \epsilon\}) = 0.$$

Se denota $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

- Sea $\{\xi_n\}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $E[\xi_n^r] < \infty$, para algún $r > 0$. Se dice que ξ_n *converge en media* r hacia una variable aleatoria ξ si $E[\xi^r] < \infty$ y además:

$$\lim_{n\to\infty} E[|\xi_n - \xi|^r] = 0,$$

y se denota $\xi_n \xrightarrow{r} \xi$. Si $r = 2$, se dice que la sucesión *converge en media cuadrática* hacia la variable ξ.

- Sea $\{\xi_n\}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre el espacio de probabilidad (Ω, φ, P). Diremos que esta sucesión *converge casi seguro* hacia una variable aleatoria ξ si y sólo si,

$$P(\{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(w) = \xi(w)\}) = 1,$$

y se denota $\xi_n \overset{c.s.}{\to} \xi$.

A continuación se observan las relaciones que existen entre los distintos tipos de convergencia:

$$\xi_n \overset{c.s.}{\to} \xi \Rightarrow \xi_n \overset{P}{\to} \xi \Rightarrow \xi_n \overset{L}{\to} \xi$$

Además, si $\xi_n \overset{r}{\to} \xi$, para algún $r > 0$, se verifica $\xi_n \overset{P}{\to} \xi$.

Una secuencia de variables aleatorias $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ cumple la *Ley Débil de los Grandes Números* si la sucesión de variables aleatorias $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ definida por $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E[\xi_i])$ converge en probabilidad a 0.

El *teorema de Tchebyshev* afirma que, dada una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ con media y varianzas finitas, y tal que $\lim_{n\to\infty} V[\xi_n] = 0$, entonces $\xi_n - E[\xi_n]$ converge en probabilidad a 0 si y sólo si para cualquier $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(\{w \in \Omega : |\xi_n(w) - E[\xi_n(w)]| > \epsilon\}) = 0.$$

Una secuencia de variables aleatorias $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ cumple la *Ley Fuerte de los Grandes Números* si la sucesión de variables aleatorias $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ definida por $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E[\xi_i])$ converge casi seguro a 0.

La *Ley Fuerte de los Grandes Números de Kolmogorov* afirma que, dada una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ con media y varianzas finitas, y tal que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V[\xi_i]/i^2 < \infty$, entonces $\{\xi_n\}$ cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Sea $\{\xi_n\}$ una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media μ y varianza σ^2 finitas. Se verifica, por el *Teorema Central del Límite*,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - n\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{L}{\to} Z,$$

donde Z es una variable aleatoria normal con media cero y varianza 1.

Ejercicios Resueltos

P6.1] Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias con distribución:

k	$P(X_n = k)$
0	$1 - 1/n$
$1 - 1/n$	$1/(2n)$
1	$1/(2n)$

Estudiar la convergencia en probabilidad, en ley y en media cuadrática de esta sucesión a la variable $X \equiv 0$.

Solución

Estudiemos en primer lugar si la sucesión $\{X_n\}_{n\in N}$ converge en probabilidad a la variable $X \equiv 0$. Para ello, dado un $\varepsilon > 0$, se tiene que:

$$P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right)$$

$$= \begin{cases} P\left(X_n = 1 - 1/n\right) + P\left(X_n = 1\right) = 1/n & , \text{si} \quad \varepsilon < 1 - 1/n \\ P\left(X_n = 1\right) = 1/\left(2n\right) & , \text{si} \quad 1 - 1/n \le \varepsilon < 1 \\ 0 & , \text{si} \quad \varepsilon \ge 1 \end{cases},$$

probándose así que esta sucesión converge en probabilidad a la variable X.

Para estudiar la convergencia en ley, nótese que la función de distribución de la variable $X_n, n \in N$ es:

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & , \text{si} \quad t < 0 \\ 1 - \frac{1}{n} & , \text{si} \quad 0 \le t < 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{2n-1}{2n} & , \text{si} \quad 1 - \frac{1}{n} \le t < 1 \\ 1 & , \text{si} \quad t \ge 1 \end{cases}$$

y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & , \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & , \text{si} \quad t \ge 0 \end{cases},$$

que es la función de distribución de la variable aleatoria degenerada $X \equiv 0$. Por lo tanto, se concluye que la sucesión converge en ley a esta última variable.

Finalmente, se analizará la convergencia en media cuadrática de la sucesión. Para ello es necesario calcular:

$$E\left[|X_n - 0|^2\right] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n} + 1^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{2n^2 - n + 1}{2n^3}.$$

Se observa que:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n|^2\right] = 0,$$

de lo que se sigue que la sucesión converge en media cuadrática a la variable aleatoria degenerada $X \equiv 0$.

P6.2] Sean $\{X_i\}_{i=1}^n$ variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en el intervalo $[0, \theta], \theta > 0$. Estudiar la convergencia en ley de la variable aleatoria $X_{(n)} = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i$.

Solución

Las variables aleatorias X_i, $i = 1, .., n$ tienen como función de distribución a:

$$F_{X_i}(x) = \frac{t}{\theta}, \text{ para } x \in [0, \theta].$$

La variable $X_{(n)}$, por su parte, tiene como función de distribución, para $t \in [0, \theta)$:

$$F_{X_{(n)}(t)} = P\left(X_{(n)} \leq t\right) = P\left(\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} X_i \leq t\right) = P\left(X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t\right),$$

y, ya que estas variables son independientes, se verifica:

$$F_{X_{(n)}(t)} = P\left(X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t\right) = \left[P\left(X_1 \leq t\right)\right]^n = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n.$$

Además, $F_{X_{(n)}(t)} = 0$ si $t < 0$, y es igual a 1 si $t \geq \theta$. Se observa que, cuando n tiende a infinito, esta función de distribución tiende a:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & , \text{si} \quad t < \theta \\ 1 & , \text{si} \quad t \geq \theta \end{cases},$$

que es la función de distribución de la variable aleatoria degenerada $X \equiv 0$.

P6.3] Dar un ejemplo de una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \in N}$ que converja a una variable aleatoria X en ley pero no en probabilidad.

Solución

Sea una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \in N}$ y una variable aleatoria X con la siguiente distribución conjunta:

$X_n \mid X$	1	2	3	
1	0	1/3	0	
2	0	0	1/3	
3	1/3	0	0	

.

Esta sucesión converge en ley a la variable aleatoria X, pues:

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & , \text{si} \quad t < 1 \\ 1/3 & , \text{si} \quad 1 \leq t < 2 \\ 2/3 & , \text{si} \quad 2 \leq t < 3 \\ 1 & , \text{si} \quad t \geq 3 \end{cases},$$

y se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t),$$

Sin embargo, dado un $\varepsilon > 0$:

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) = \begin{cases} 1 & , \text{si} \quad 0 < \varepsilon < 1 \\ 1/3 & , \text{si} \quad 1 \leq \varepsilon < 2 \\ 0 & , \text{si} \quad \varepsilon \geq 2 \end{cases},$$

que no converge a cero cuando $n \to \infty$, por lo que la sucesión $\{X_n\}_{n\in N}$ no converge en probabilidad a la variable X.

P6.4] Sea $\{F_{\xi_n}\}$ una sucesión de funciones de distribución definidas de la siguiente forma:

$$F_{\xi_n}(t) = \begin{cases} 0 & , \text{si} \quad t < 0 \\ 1 - \frac{1}{n} & , \text{si} \quad 0 \leq t < n \\ 1 & , \text{si} \quad n \leq t \end{cases}.$$

Estudiar la convergencia en ley de esta sucesión.

Solución

Esta sucesión converge de forma clara a:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & , \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases},$$

que es la función de distribución de la variable aleatoria $\xi \equiv 0$. Por lo tanto:

$$\xi_n \xrightarrow{L} 0.$$

P6.5] Sea la sucesión de variables aleatorias $\{\xi_n\}$ tales que:

$$P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$$
$$P(\xi_n = n) = \frac{1}{n^2}$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Demostrar que esta sucesión converge en probabilidad a la variable aleatoria degenerada $\xi \equiv 0$, pero sin embargo no converge en media cuadrática.

Solución

Para estudiar la convergencia en probabilidad es necesario ver, para todo $\epsilon > 0$, la convergencia en el límite de $P(|\xi_n - 0| > \epsilon)$. Se observa que:

$$P(|\xi_n - 0| > \epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & , \text{si} \quad \epsilon < n \\ 0 & , \text{si} \quad \epsilon \geq n \end{cases},$$

por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - 0| > \epsilon) = 0.$$

Sin embargo, nótese que $E\left[|\xi_n|^2\right] = 1$, por lo que esta sucesión no converge en media cuadrática a la variable aleatoria $\xi \equiv 0$.

P6.6] Aplique la Ley Débil de los Grandes Números a un ejemplo.

Solución

Supongamos que un jugador de baloncesto realiza una serie de lanzamientos a canasta, siendo $p = 2/3$ su probabilidad de encestar en cada tiro. Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ variables aleatorias independientes con distribución de Bernoulli de parámetro $p = 2/3$, donde cada variable representa el resultado de un tiro a canasta y p es la probabilidad de éxito. Realizados n tiros, $\sum_{i=1}^{n} \xi_i/n$ es la proporción de aciertos. Entonces, de acuerdo con la Ley Débil de los Grandes Números, esta proporción converge en probabilidad a 2/3. Esto no quiere decir que la proporción de aciertos se acerque a 2/3 conforme crece n, sino que la probabilidad de que la diferencia entre esta proporción y 2/3 sea mayor que una cierta cantidad $\varepsilon > 0$ tiende a cero.

P6.7] Una empresa realiza un test de 80 preguntas (con dos posibles respuestas cada una, de las que sólo hay una cierta) a dos miembros de su plantilla que han solicitado un ascenso a un puesto del que sólo hay una plaza vacante. Suponiendo que el primer empleado sabe la respuesta de 50 preguntas y contesta al azar a las 30 restantes, y el segundo empleado tan sólo puede contestar correctamente a 20 y responde al azar al resto:

1. Obtener la probabilidad de que el primer empleado conteste correctamente a más de 40 preguntas.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo empleado responda adecuadamente a un mínimo de 50 preguntas?
3. Si uno de los dos empleados contestara al azar a todas las preguntas, ¿cuál sería la probabilidad de que acertara al menos 40?

Solución

Suponiendo la independencia entre preguntas en el caso de cada empleado, sea X_1 una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n_1 = 30$ y $p_1 = 1/2$ que representa el número de preguntas, del total de 30 que responde al azar, que acierta el primer empleado. Sea también otra variable X_2 que representa esto último en el caso del segundo empleado (de un total de 60 respondidas al azar), y sigue una distribución también binomial de parámetros $n_2 = 60$ y $p_2 = 1/2$.

1. Aproximemos, mediante el Teorema Central del Límite, la distribución discreta X_1 a una normal
$$X_1^* \sim N\left(n_1 \cdot p_1 = 15, n_1 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1) = 7{,}5\right),$$
aplicando además una corrección por continuidad para el cálculo de la probabilidad:
$$P\left(X_1 > 10\right) \cong P\left(Z > \frac{10 + 0{,}5 - 15}{\sqrt{7{,}5}}\right) = 0{,}9495$$

2. De forma similar al apartado anterior, aproximemos la variable aleatoria X_2 a una normal
$$X_2^* \sim N\left(n_2 \cdot p_2 = 30, n_2 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2) = 15\right),$$
obteniéndose que:
$$P\left(X_2 \geq 30\right) \cong P\left(Z > \frac{30 - 0{,}5 - 30}{\sqrt{15}}\right) = 0{,}5517$$

3. Definamos una variable Y que representa el número de respuestas correctas del empleado, en el caso de que éste responda las 80 preguntas al azar, y sigue una distribución binomial de parámetros $n = 80$ y $p = 1/2$. Procediendo de forma análoga a los casos anteriores, la probabilidad de que acierte al menos 40 preguntas es:
$$P\left(Y \geq 40\right) \cong P\left(Z > \frac{40 - 0{,}5 - 40}{\sqrt{20}}\right) = 0{,}5438$$

P6.8] El número de personas que acuden un banco en una semana para abrir una cuenta sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 1$. ¿Cuál es la probabilidad de que en dos años (es decir, 104 semanas) se hayan abierto más de 100 cuentas?

Solución

Sean $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ variables aleatorias independientes con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 1$, que representan el número de personas que acuden al banco en una semana determinada. La distribución de la suma de estas n variables es una Poisson de parámetro $n\lambda$. Teniendo en cuenta lo anterior, y aplicando el Teorema Central del Límite, podemos aproximar la suma de las $n = 104$ variables (tantas como semanas hay en 2 años), $X = \sum_{i=1}^{104} X_i$, a una normal de parámetros $\mu = 104$ y $\sigma^2 = 104$. Se tiene entonces que:
$$P\left(X > 100\right) \cong P\left(Z > \frac{100 + 0{,}5 - 104}{\sqrt{104}}\right) = 0{,}6331$$

CAPÍTULO 7

Regresión y correlación

- Sean X e Y variables aleatorias dependientes, entre las que existe una relación funcional del tipo $y = E[Y \mid x]$, denominada "regresión de Y sobre X". Un caso particular consiste en aproximar la relación entre ambas variables por una recta:
$$y = ax + b.$$
Calculando los valores de a y b que minimizan $E\left[(Y - aX - b)^2\right]$ se obtiene la denominada "recta de regresión de Y sobre X":
$$y - E[Y] = \frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{V(X)} \cdot (x - E[X]).$$
- Si existen $E\left[X^2\right]$ y $E\left[Y^2\right]$, se define el "coeficiente de correlación entre X e Y" como:
$$\rho_{XY} = \rho = \frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}.$$
El coeficiente de correlación entre dos variables aleatorias X e Y verifica:
$$|\rho_{XY}| \leq 1.$$
- Se dice que dos variables aleatorias X e Y están incorreladas si y sólo si se verifica $\rho_{XY} = 0$.
Nótese que $\rho_{XY} = 0$ si y sólo si $\mathsf{cov}(X,Y) = 0$, por lo que si X e Y son independientes, entonces también están incorreladas.

Ejercicios Resueltos

P7.1] Sea X una variable aleatoria que se distribuye uniformemente en el intervalo $(0,1)$. ¿Están las variables aleatorias X y $|1/2-X|$ incorreladas?

Solución

Para estudiar si estas variables están incorreladas obtengamos el coeficiente de correlación ρ_{XY}. Se tiene que:

$$\mathsf{cov}\left(X, \left|\frac{1}{2}-X\right|\right) = E\left[X \cdot \left|\frac{1}{2}-X\right|\right] - E\left[X\right] \cdot E\left[\left|\frac{1}{2}-X\right|\right],$$

siendo:

$$\begin{aligned} E\left[X \cdot \left|\frac{1}{2}-X\right|\right] &= \int_0^1 x \cdot \left|\frac{1}{2}-x\right| \cdot f_X(x) \cdot \partial x = \\ &= \int_0^{1/2} x \cdot \left(\frac{1}{2}-x\right) \cdot \partial x - \int_{1/2}^1 x \cdot \left(\frac{1}{2}-x\right) \cdot \partial x = \frac{1}{8}, \\ E\left[X\right] &= \frac{1}{2}, \\ E\left[\left|\frac{1}{2}-X\right|\right] &= \int_0^1 \left|\frac{1}{2}-x\right| \cdot f_X(x) \cdot \partial x = \int_0^1 \left|\frac{1}{2}-x\right| \cdot \partial x = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

por lo que:

$$\mathsf{cov}\left(X, \left|\frac{1}{2}-X\right|\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

Por lo tanto, $\rho_{XY} = 0$, y se concluye así que ambas variables están incorreladas.

P7.2] Sean U y V variables aleatorias con igual media e igual varianza. Utilizando estas variables, obtenga dos variables aleatorias incorreladas.

Solución

Definamos $X = U + V$ e $Y = U - V$. Entonces,

$$\mathsf{cov}\left(X,Y\right) = E\left[XY\right] - E\left[X\right] E\left[Y\right] = E\left[U^2 - V^2\right] - \left(E\left[U\right]^2 - E\left[V\right]^2\right) = 0,$$

y por lo tanto $\rho_{XY} = 0$.

P7.3] Sea

$X \mid Y$	0	3
1	0,3	0,1
2	0,1	0,5

la distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y.

1. Obtener el coeficiente de correlación de estas variables.
2. Determinar la recta de regresión de Y sobre X.

Solución

1. Las correspondientes distribuciones de probabilidad marginales son:

$X = x_i$	$P(X = x_i)$
1	0,4
2	0,6

$\eta = y_i$	$P(Y = y_i)$
0	0,4
3	0,6

Además:

$$\begin{aligned} E[X \cdot Y] &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = 3{,}3, \\ E[X] &= \sum_{i=1}^{2} x_i P(X = x_i) = 1{,}6, E\left[X^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{2} x_i^2 P(X = x_i) = 2{,}8 \\ E[Y] &= \sum_{j=1}^{2} y_j P(Y = y_j) = 1{,}8, E\left[Y^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{2} y_j^2 P(Y = y_j) = 5{,}4 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\rho_{XY} = \frac{3{,}3 - 1{,}6 \cdot 1{,}8}{\sqrt{(2{,}8 - 1{,}6^2) \cdot (5{,}4 - 1{,}8^2)}} = 0.\,58333.$$

2. La recta de regresión de Y sobre X es:

$$y - 1{,}8 = 1{,}75 \cdot (x - 1{,}6)\,.$$

P7.4] Sean:

$$y = \frac{x}{15} + 2,$$
$$y = \frac{x}{9} + 1.$$

las rectas de regresión de la variable aleatoria bidimensional (X, Y). Determinar el coeficiente de correlación entre X e Y.

Solución

Las rectas de regresión de Y sobre X y de X sobre Y son, respectivamente:

$$y - E[Y] = \frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{V(X)} \cdot (x - E[X]),$$
$$x - E[X] = \frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{V(Y)} \cdot (y - E[Y]).$$

Por lo tanto, se observa que

$$\frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{1}{15},$$
$$\frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{V(Y)} = 9.$$

Se obtiene entonces que:

$$\rho_{XY}^2 = \frac{[\mathsf{cov}(X,Y)]^2}{V(X)\,V(Y)} = \frac{9}{15},$$

por lo que finalmente $\rho_{XY} = \sqrt{9/15}$.

P7.5] Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con la siguiente distribución conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, si } |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

Determinar el coeficiente de correlación entre X e Y.

Solución

Las funciones de densidad marginales de estas dos variables son:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{, si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - y & \text{, si } 0 < y < 1 \\ 1 + y & \text{, si } -1 < y \le 0 \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

por lo que se obtiene que:

$$\mathsf{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y]$$
$$= \int_0^1 \left(\int_{-x}^x xyf(x,y)\,\partial y \right) \partial x = \int_0^1 \left(\int_{-x}^x xy\partial y \right) \partial x = 0,$$

luego $\rho_{XY} = 0$.

P7.6] Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = xy, \text{ si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Obtenga la recta de regresión de Y sobre X y calcule el coeficiente de correlación entre ambas variables.

Solución

Las correspondientes funciones de densidad marginales son:

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x, y) \cdot \partial y = \int_0^1 xy \cdot \partial y = \frac{x}{2},$$
$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x, y) \cdot \partial x = \int_0^1 xy \cdot \partial x = \frac{y}{2}.$$

Se obtiene entonces:

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot f_X(x) \cdot \partial x = \frac{1}{6} = E[Y],$$
$$E\left[X^2\right] = \int_0^1 x^2 \cdot f_X(x) \cdot \partial x = \frac{1}{8} = E\left[Y^2\right],$$

y por lo tanto

$$V(X) = V(Y) = \frac{7}{72}.$$

Además:

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^1 xyf(x, y)\, \partial y \partial x = \frac{1}{9}.$$

La recta de regresión de Y sobre X es, por lo tanto:

$$y - \frac{1}{6} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{36}}{\frac{7}{72}} \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right),$$

es decir:

$$y - \frac{1}{6} = \frac{6}{7} \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right).$$

Finalmente, el coeficiente de correlación entre las variables X e Y es:

$$\rho_{XY} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{72}} = \frac{6}{7}.$$

Bibliografía

[1] J.M. Casas, C. García, L.F. Rivera, A.I. Zamora: *Problemas de Estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia.* Ed. Pirámide, Madrid, 1998.

[2] C.M. Cuadras: *Problemas de Probabilidades y Estadística. Vol 1: Probabilidades.* Ed. PPU, Barcelona, 1985.

[3] F.J. Martín Pliego, J.M. Montero, L. Ruíz Maya: *Problemas de Probabilidad.* Ed. AC, Madrid, 1998.

[4] J. Montero, L. Pardo, D. Morales, V. Quesada: *Ejercicios y Problemas de Cálculo de Probabilidades.* Ed. Díaz de Santos, Madrid, 1988.

[5] V. Quesada, A. Isidoro, L.J. López: *Curso y Ejercicios de Estadística.* Ed. Alhambra, 1984.

[6] V.A. Rohatgi: *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics.* Ed. John Wiley & Sons, Nueva York, 1976.