Pauta Pregunta 2, Control 3

Cátedra: Probabilidades
Profesor: Alejandro Maass S.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Gonzalo Contador

03 de diciembre, 2010

Sean $E = \{0,1\}$ y $\alpha \in (0,1)$. Considerar Q, una matriz estocástica de la forma:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{00} & Q_{01} \\ Q_{10} & Q_{11} \end{bmatrix}.$$

A cada $e \in E$ se asocia una partición $\mathcal{P} = \{I_{e0}, I_{e1}\}$ de $[\alpha, 1]$ formada por dos intervalos consecutivos de largo $(1-\alpha)Q_{e0}$ y $(1-\alpha)Q_{e1}$, respectivamente. Se definen las variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manera recursiva como sigue:

$$\begin{cases} X_0 = 1_{[\alpha/2,\alpha]}(U_0) + 1_{I_{01}}(U_0) \\ X_n = 1_{[\alpha/2,\alpha]}(U_n) + 1_{I_{X_{n-1}1}}(U_n) \end{cases},$$

donde $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $[0,1]$. Probar que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena de Markov homogénea tal que:

$$\mathbb{P}(X_n = i | X_{n-1} = j) = \frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)Q_{ji},$$

si $n \geq 1$ e $i, j \in E$.

Demostración. Veamos que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena de Markov:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ = & \frac{\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)} \\ = & \frac{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]} + 1_{I_{X_{n-1}1}}(U_n) = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]} + 1_{I_{X_{n-2}1}}(U_{n-1}), X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)} \end{aligned}$$

Como $[\alpha/2, \alpha] \cap I_{e1} = \emptyset$, se tiene que:

$$1_{[\alpha/2,\alpha]} + 1_{I_{e1}} = 1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{e1}}.$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{X_{n-1}1}}(U_n)=i_n, X_{n-1}=i_{n-1},\ldots,X_1=i_1,X_0=i_0)}{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{X_{n-2}1}}(U_{n-1}), X_{n-2}=i_{n-2},\ldots,X_1=i_1,X_0=i_0)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-1}1}}(U_n)=i_n, X_{n-1}=i_{n-1},\ldots,X_1=i_1,X_0=i_0)}{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-2}1}}(U_{n-1}), X_{n-2}=i_{n-2},\ldots,X_1=i_1,X_0=i_0)}\\
&\vdots\\
&= \frac{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-1}1}}(U_n)=i_n,\ldots,1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_0 1}}(U_1)=i_1, 1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{01}}(U_0)=i_0)}{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-2}1}}(U_{n-1})=i_{n-1},\ldots,1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_0 1}}(U_1)=i_1, 1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{01}}(U_0)=i_0))}
\end{aligned}
$$

Ahora, como $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de v.a.'s independientes, entonces:

$$(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-1}1}}(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

también lo es, pues son funciones de v.a.'s independientes. Así,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-1}1}}(U_n)=i_n)\cdots\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_0 1}}(U_1)=i_1)\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{01}}(U_0)=i_0)}{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-2}1}}(U_{n-1})=i_{n-1})\cdots\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_0 1}}(U_1)=i_1)\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{01}}(U_0)=i_0))}\\
&= \frac{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-1}1}}(U_n)=i_n)\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-2}1}}(U_{n-1})=i_{n-1})}{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-2}1}}(U_{n-1})=i_{n-1})}\\
&= \frac{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-1}1}}(U_n)=i_n, 1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-2}1}}(U_{n-1})=i_{n-1})}{\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-2}1}}(U_{n-1})=i_{n-1})}\\
&= \mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-1}1}}(U_n)=i_n | 1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-2}1}}(U_{n-1})=i_{n-1})\\
&= \mathbb{P}(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1})
\end{aligned}
$$

Luego, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cadena de Markov. Por otro lado, reutilizando lo anterior,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1})\\
=\;& \mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-1}1}}(U_n)=i_n)\\
=\;& \mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-1}1}}(U_n)=i_n)1_{\{i_n=0\}}+\mathbb{P}(1_{[\alpha/2,\alpha]\cup I_{i_{n-1}1}}(U_n)=i_n)1_{\{i_n=1\}}\\
=\;& (\ell([0,\alpha/2])+\ell(I_{i_{n-1}0}))1_{\{i_n=0\}}+(\ell(\alpha/2,\alpha])+\ell(I_{i_{n-1}1}))1_{\{i_n=1\}}\\
=\;& \alpha/2+\ell(I_{i_{n-1}i_n})1_{\{i_n=0\}}+\ell(I_{i_{n-1}i_n})1_{\{i_n=1\}}\\
=\;& \alpha/2+\ell(I_{i_{n-1}i_n})\\
=\;& \alpha/2+(1-\alpha)Q_{i_{n-1}i_n},
\end{aligned}
$$

donde ℓ denota el largo del intervalo considerado (pues la probabilidad de que U_n tome valores en cierto intervalo es proporcional al largo de este). Finalmente, como $\mathbb{P}(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1})$ no depende de n, la cadena es homogénea, esto es:

$$\mathbb{P}(X_n=i|X_{n-1}=j)=\mathbb{P}(X_1=i|X_0=j).$$

□