Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #8 Probabilidades

Profesor: Alejandro Maass.

Auxiliares: Raimundo Briceño, Gonzalo Contador.

P1. *Sobre la metrizabilidad de la convergencia en probabilidad, y la relación con convergencia casi segura*

a) Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias convergiendo en probabilidad a X. Pruebe que existe una subsucesión $(X_{n_k})_k$ que converge a X $\mathbb{P}-$casi seguramente.

b) Considere ahora la aplicación $d(X,Y) = \mathbb{E}(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|})$. Pruebe que d es simétrica, satisface la desigualdad triangular y que $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \neq Y) = 0$.

c) Pruebe que $(X_n)_n$ converge en probabilidad a X si y sólo si $d(X_n, X) \longrightarrow 0$

P2. Al sumar numeros reales, una persona aproxima cada número al entero más cercano. Si las cantidades decimales de los números sumados tienen distribución uniforme y los errores de aproximación son independientes, dé una buena aproximación de la probabilidad de que el error en la suma sea menor que $r > 0$ al sumar N números.

P3. En un edificio de N pisos, a un ascensor suben con igual probabilidad 1, 2 o 3 pasajeros. Si cada pasajero desciende en un piso de manera independiente a los demás, calcule el número esperado de paradas realizadas por el ascensor en cada viaje.

P4. Sea $X \sim exponencial(1)$, e Y variable aleatoria con distribución condicional a X dada por

$$f_{Y|X}(y|x) = e^{x-y} 1_{\{x<y\}}$$

Calcule
a)$f_{X|Y}(x|y)$
b) $\mathbb{E}(X|Y)$
c) $\mathbb{E}(X)$