Auxiliar 7 - Esperanza

Cátedra: Probabilidades
Profesor: Alejandro Maass S.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Gonzalo Contador

25 de octubre, 2010

1.

   a) Sea X una v.a. a valores en $\mathbb{N}$. Mostrar que:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

   b) Una urna contiene b bolitas azules y r rojas. Las bolitas son removidas hasta que sale la primera azul. Mostrar que el número esperado de bolitas removidas es $(b + r + 1)/(b + 1)$.

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes y suponer que $X_i \sim Bernoulli(p_i)$, donde $1 \leq i \leq n$. Mostrar que $Y = X_1 + \cdots + X_n$ tiene esperanza y varianza dadas por:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i \quad y \quad \mathbb{V}(Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i),$$

   y que, fijando $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(Y)$ es máxima cuando $p_1 = \cdots = p_n$.

3. Sean X e Y v.a. independientes con distribución uniforme en $[0, 1]$. Sean $U = \min\{X, Y\}$ y $V = \max\{X, Y\}$. Encontrar $\mathbb{E}(U)$ y calcular $\operatorname{cov}(U, V)$.

4. Sean X e Y v.a. continuas e independientes. Mostrar que:

$$\mathbb{E}\left(g(X)h(Y)\right) = \mathbb{E}\left(g(X)\right)\mathbb{E}\left(h(Y)\right),$$

   siempre que estas esperanzas existan. Suponer que X e Y poseen distribución exponencial de parámetro 1 y encontrar $\mathbb{E}\{\exp(\frac{1}{2}(X + Y))\}$.

5. Sean $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ v.a. independientes idénticamente distribuidas con varianza finita. Se define $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Mostrar que:

$$\operatorname{cov}(\overline{X}, X_i - \overline{X}) = 0,$$

   donde $1 \leq i \leq n$.

6. Sean X, Y variables aleatorias.

   a) *(Desigualdad de Hölder)* Mostrar que si $p, q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces:

   $$\mathbb{E}(|XY|) \leq \{\mathbb{E}(|X|^p)\}^{1/p}\{\mathbb{E}(|Y|^q)\}^{1/q}.$$

   Notar que si $p = q = 2$, se deduce la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

   $$\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}.$$

   b) *(Desigualdad de Minkowski)* Mostrar que si $p \geq 1$, entonces:

   $$\{\mathbb{E}(|X+Y|^p)\}^{1/p} \leq \{\mathbb{E}(|X|^p)\}^{1/p} + \{\mathbb{E}(|Y|^p)\}^{1/p}.$$

7. *(El método probabilista)* Sea $G = (V, E)$ un grafo finito. Para un conjunto cualquiera W de vértices y un arco $e \in E$, se define la función indicadora:

   $$I_W(e) = \begin{cases} 1, \text{ si } e \text{ conecta } W \text{ con } W^c \\ 0, \text{ si no} \end{cases}$$

   Sea $N_W = \sum_{e \in E} I_W(e)$. Mostrar que existe $W \subseteq V$ tal que $N_W \geq \frac{1}{2}|E|$.