Auxiliar 5 - Combinatoria

Cátedra: Probabilidades
Profesor: Alejandro Maass S.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Gonzalo Contador

03 de octubre, 2010

1. Calcule la probabilidad de que entre m estudiantes en una sala de clases al menos dos estén de cumpleaños el mismo día.

2. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, se escoge al azar una función en el conjunto:

$$\mathcal{F}_{n,m} = \{f : \{1, \dots, n\} \mapsto \{1, \dots, m\} | f \text{ función}\}$$

   Calcule la probabilidad de que:

   a) la función escogida sea inyectiva,

   b) la función escogida sea sobreyectiva.

3. *(Derangements)*

   a) Muestre que dada una permutación cualquiera de $\{1, \dots, n\}$, la probabilidad de que r elementos mantengan su posición está dada por:

$$\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right)$$

   b) Sea d_n el número de *derangements* en $\{1, \dots, n\}$ (esto es, el número de permutaciones en donde ningún elemento mantiene su posición original). Muestre que $d_{n+1} = nd_n + nd_{n-1}$ para $n \geq 2$, y deduzca la parte anterior de una manera alternativa.

4. En torno a una mesa circular, n hombres y n mujeres toman asiento alternadamente. Suponga que entre ellos forman n parejas heterosexuales y monógamas. Si todos toman asiento aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que nadie quede junto a su pareja?

Recuerdo *(Principio de inclusión-exclusión)*: dada una colección cualquiera $A_1, A_2, \dots, A_n$ de conjuntos finitos, se tiene que:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, |I|=k} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$