Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #3 Probabilidades

Profesor: Alejandro Maass.

Auxiliares: Raimundo Briceño, Gonzalo Contador.

P1. *Lema de Borel Cantelli*

Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eventos en un espacio de probabilidad. Definimos los siguientes conjuntos

$$limsupA_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$$

$$liminfA_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geqslant n} A_k$$

a) Pruebe que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, entonces $\mathbb{P}(limsupA_n) = 0$

b) Pruebe que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ y los A_n son independientes, entonces $\mathbb{P}(limsupA_n) = 1$

P2. Sea $X \sim Uniforme(0,1)$. Pruebe que la variable aleatoria $Y = -ln(X)$ sigue una distribución exponencial de parámetro 1.

P3. Sea X variable aleatoria a valores en $\mathbb{R}$, cuya función de distribución F es estrictamente monótona. Definimos la variable $Y = F(X)$. Pruebe que
$Y \sim Uniforme(0,1)$.

P4. a) Sean $X_1...X_n$ variables aleatorias independientes, cada una con distribución $Bernoulli(p)$. Definimos la siguiente variable aleatoria

$$Y = inf\{i \in \mathbb{N} : X_i = 1\}$$

Calcule la distribución de Y.

b) En el mismo contexto de la pregunta anterior, sea $J \subset \{1...n\}$, con $|J| = k$. Muestre que

$$\mathbb{P}(X_i = 1 \forall i \in J, X_i = 0 \forall i \notin J | \sum_{i=1}^{n} X_i = k) = \binom{n}{k}^{-1}$$

P5. Sea X un conjunto de tamaño n, y fije un elemento $x \in X$.

a) Se extrae un subconjunto A de X de manera equiprobable. Calcule la probabilidad de que $x \in A$.

b) Se extraen ahora, de manera equiprobable, dos subconjuntos A y B (con reposición). Muestre que $\mathbb{P}(A \subset B) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

P6. Pruebe que no existe manera de cargar dos dados independientes de manera de que el resultado tenga distribución uniforme en $\{2...12\}$. En terminos formales, muestre que si X e Y son variables aleatorias independientes a valores en $\{1...6\}$, entonces no hay ningún par de vectores de probabilidad tales que $\mathbb{P}(X + Y = k) = \frac{1}{11}$ $\forall k \in \{2...12\}$

P7. Sea $A \sim Uniforme(0, 5)$. Calcule la probabilidad de que la ecuación

$$4x^2 + 4Ax + A + 2 = 0$$

tenga raíces reales