

Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

## Auxiliar #1 Probabilidades

Profesor: Alejandro Maass.

Auxiliares: Raimundo Briceño, Gonzalo Contador.

### P1. Principio de Inclusión-Exclusión

Sea  $(\Omega, \beta, \mathbb{P})$  espacio de probabilidad y  $A_1 \dots A_n \in \beta$ . Muestre que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{|J|=k} \mathbb{P}(A_J)$$

Donde  $J$  es un subconjunto de  $\{1 \dots n\}$  y  $A_J := \bigcap_{j \in J} A_j$ .

**P2.** Pruebe que toda función de distribución de probabilidad se puede escribir como una combinación convexa entre una función de distribución absolutamente continua y una función de distribución discreta.

**P3.** Pruebe que la intersección de sigma álgebras es una sigma álgebra. ¿Qué puede decir sobre la unión de sigma álgebras?

**P4.** Sea  $(\Omega, \beta, \mathbb{P})$  espacio de probabilidad y  $A \in \beta$  un conjunto tal que  $\mathbb{P}(A) > 0$ . Definimos la aplicación

$$\mathbb{Q} : \beta \longrightarrow [0, 1]$$

$$B \mapsto \mathbb{Q}(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Muestre que  $\mathbb{Q}$  es una medida de probabilidad bien definida sobre  $\beta$ .

### P5. La ley de los eventos improbables

Diremos que la variable aleatoria  $X$  sigue una distribución de *Poisson* de parámetro  $\lambda > 0$  si se tiene

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

para  $k$  entero no negativo. De igual manera, diremos que  $Y$  sigue una distribución *Binomial*( $n, p$ ), donde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in (0, 1)$  si se verifica

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

para  $k \in \{0, 1 \dots n\}$

Sea  $\lambda \in (0, 1)$ . Consideremos una sucesión  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aleatorias,  $X_n \sim \text{Binomial}(n, \frac{\lambda}{n})$ , y una variable aleatoria  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ . Pruebe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$