Pauta Control N° 1 MA-2601

Gonzalo Hernández

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1) Una partícula de masa m $[kg]$ que se desplaza por un fluído está sujeta a una resistencia viscoza R $[newtons]$ que es función de la velocidad v $\left[\frac{m}{s}\right]$. La relación entre la resistencia R , la velocidad v y el tiempo t está dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{m}{R(v)} \qquad v \geq 0 \qquad t(v = v_0) = t_0 \tag{1}$$

Suponga que la viscosidad se puede modelar como: $R(v) = -v^{\frac{3}{2}}$ para un determinado fluido y que se tienen los siguientes datos: $m = 10$ $[kg]$ $, v_0 = 10$ $\left[\frac{m}{s}\right]$ $, t_0 = 0$. Determine el tiempo que demora la partícula en reducir su velocidad inicial de $v_0 = 10$ $\left[\frac{m}{s}\right]$ a una velocidad de $v = 2$ $\left[\frac{m}{s}\right]$.

<u>Solución:</u>

La edo (1) es una ecuación directamente integrable:

$$(t - t_0) = \int_{v_0}^{v} \frac{m}{R(u)} du \tag{2}$$

Reemplazando los datos del problema, se tiene:

$$t = -\int_{10}^{2} \frac{10}{u^{\frac{3}{2}}} du = -10 \left(-2v^{-\frac{1}{2}} \Big|_{10}^{2} \right) = \left(10\sqrt{2} - 2\sqrt{10}\right) \ [s] \approx 7.8176 \ [s] \tag{3}$$

2) Considere la ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y(1-y)}{3x+1}$$

(a) Determine el dominio de la ecuación.

(b) Determine las soluciones constantes.

(c) Determine la solución general en forma implícita.

(d) Determine la solución general en forma explícita.

Solución:

(a) El dominio es $D = \{(x, y) : x \neq -\frac{1}{3}\}$

(b) Como $x \neq -\frac{1}{3}$ y:

$$3y(1-y) = 0 \iff y = 0 \vee y = 1 \tag{4}$$

tenemos cuatro soluciones constantes. Las 2 primeras son:

$$\begin{aligned} u_1, u_2 &: \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\to \mathbb{R} \\ u_1(x) &= 0 \\ u_2(x) &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

La tercera y cuarta son:

$$\begin{aligned} u_3, u_4 &: \left]\frac{1}{3}, \infty\right[\to \mathbb{R} \\ u_3(x) &= 0 \\ u_4(x) &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

(c) Para $y \neq 0, 1$, separando variables se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y(1-y)} &= \frac{3dx}{3x+1} \\ \frac{dy}{y} + \frac{dy}{1-y} &= \frac{3dx}{3x+1} \\ \ln\left(|\frac{y}{1-y}|\right) &= \ln(|3x+1|) + \ln(c) \end{aligned} \tag{7}$$

Luego, la solución general en forma implícita está dada por:

$$\frac{y}{1-y} = c(3x+1) \quad \text{para } c \in \mathbb{R} \tag{8}$$

(d) De la ecuación anterior, despejando y se obtiene:

$$y(x) = \frac{c(3x+1)}{1+c(3x+1)} \tag{9}$$

En la expresión anterior vemos que el denominador $1 + c(3x + 1)$ se anula si y sólo si $c \neq 0$ y $x = x(c) = -\frac{1}{3c} - \frac{1}{3}$. Como $x(c) > -\frac{1}{3}$ para todo $c < 0$ y $x(c) < -\frac{1}{3}$ para todo $c > 0$, tenemos las siguientes soluciones:

i) Para $c < 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} y_{c,1} &: \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\to \mathbb{R} \\ y_{c,2} &: \left]-\frac{1}{3}, x(c)\right[\to \mathbb{R} \\ y_{c,3} &:]x(c), \infty[\to \mathbb{R} \end{aligned} \tag{10}$$

definidas por:

$$y_{c,i}(x) = \frac{c(3x+1)}{1+c(3x+1)} \quad i \in \{1,2,3\} \tag{11}$$

ii) Para $c > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} y_{c,1} &: \ ]-\infty, x(c)[\to \mathbb{R} \\ y_{c,2} &: \ \left]x(c), -\frac{1}{3}\right[\to \mathbb{R} \\ y_{c,3} &: \ \left]\frac{1}{3}, \infty\right[\to \mathbb{R} \end{aligned} \tag{12}$$

definidas por:

$$y_{c,i}(x) = \frac{c(3x+1)}{1+c(3x+1)} \quad i \in \{1,2,3\} \tag{13}$$

iii) Si $c = 0$ se tienen las soluciones constantes

$$\begin{aligned} u_1, u_2 &: \ \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\to \mathbb{R} \qquad u_1(x) = 0 \quad \wedge \quad u_2(x) = 1 \\ u_3, u_4 &: \ \left]\frac{1}{3}, \infty\right[\to \mathbb{R} \qquad u_3(x) = 0 \quad \wedge \quad u_4(x) = 1 \end{aligned} \tag{14}$$

iv) Tenemos:

$$\frac{c(-9+1)}{1+c(-9+1)} = \frac{-8c}{1-8c} \tag{15}$$

Además:

$$\frac{-8c}{1-8c} = 2 \iff -8c = 2 - 16c \iff c = \frac{1}{4} \tag{16}$$

Entonces como $x\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{3} < -\frac{1}{3}$, nuestra solución es:

$$u :]-\infty, -\frac{5}{3}[\to \mathbb{R}, \quad u(x) = \frac{3x+1}{5+3x} \tag{17}$$

3) La ecuación diferencial de Bernoulli de orden n (un entero con $n \neq 1$) se define según:

$$\frac{dy(x)}{dx} + \alpha(x)y(x) = \beta(x)y(x)^n \qquad x \geq 0 \qquad y(x=0) = y_0 \tag{18}$$

Esta edo es no lineal pero se puede reducir a una edo lineal, aplicando la siguiente metodología:

Paso 1: Se multiplica la ecuación (18) por $(1-n)y^{-n}$:

$$\begin{aligned} (1-n)y^{-n}\frac{dy(x)}{dx} + (1-n)\alpha(x)y(x)^{1-n} &= \beta(x)(1-n) \\ \frac{d}{dx}\left(y(x)^{1-n}\right) + (1-n)\alpha(x)y(x)^{1-n} &= \beta(x)(1-n) \end{aligned} \tag{19}$$

Paso 2: Se aplica el cambio de variable: $u(x) = y(x)^{1-n}$, obteniéndose una edo lineal normalizada de primer orden en la función $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} + a_0(x)u(x) = q(x) \tag{20}$$

donde $a_0(x) = (1-n)\alpha(x), q(x) = \beta(x)(1-n)$.

Paso 3: Se determina la función $u(x)$ resolviendo la edo linealizada (20).

Paso 4: Se determina finalmente la función $y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-n}}$ y si se tiene una condición lineal se determina la constante.

Para la siguiente ecuación diferencial tipo Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + x^2y = x^2y^{-2} \qquad x \geq 0 \qquad y(0) = 2 \tag{21}$$

donde $n = -2, p(x) = x^2, q(x) = x^2$, aplique la metodología anterior de 4 pasos para determinar la solución analítica de la ecuación de Bernoulli (21), incluyendo la constante de la solución.

<u>Solución:</u> Para la ecuación de Bernoulli dada, aplicamos la metodología de los 4 pasos:

Paso 1: Se multiplica la ecuación (21) por $(1-n)y^{-n} = 3y^2$, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + x^2y &= x^2y^{-2} \qquad / * 3y^2 \\ 3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2y^3 &= 3x^2 \\ \frac{d}{dx}\left(y^3\right) + 3x^2y^3 &= 3x^2 \end{aligned} \tag{22}$$

Paso 2: Se aplica el cambio de variable: $u(x) = y(x)^3$, obteniéndose una edo lineal normalizada de primer orden con respecto a la función $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} + 3x^2u = 3x^2 \tag{23}$$

Paso 3: Se determina la función $u(x)$ resolviendo la edo linealizada (21):

$$\begin{aligned} u(x) &= ce^{-\int 3x^2dx} + e^{-\int 3x^2dx}\int 3x^2\left(e^{\int 3x^2dx}\right)dx \\ &= ce^{-x^3} + e^{-x^3}\int 3x^2e^{x^3}dx = ce^{-x^3} + 1 \end{aligned} \tag{24}$$

Paso 4: Se determina finalmente la función $y(x) = u(x)^{\frac{1}{3}}$:

$$y(x) = \left(ce^{-x^3} + 1\right)^{\frac{1}{3}} \tag{25}$$

Además en este caso se puede determinar la constante c pues se tiene una condición inicial:

$$y(0) = 2 = (c+1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow c = 7 \tag{26}$$

Finalmente:

$$y(x) = \left(7e^{-x^3} + 1\right)^{\frac{1}{3}} \tag{27}$$